แบรนด์ ซัมเมอร์แคมป์ 2011

จัดโดย **มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์**

ร่วมกับ **มูลนิธิการศึกษาทางไกลผ่านดาวเทียม**
มูลนิธิเพื่อพัฒนาการศึกษาไทย

สนับสนุนโดย **แบรนด์ซุปไก่สกัด**

BRANDS® SUMMER CAMP 2011
ครั้งที่ 22

ด้วยความร่วมมือจาก
- บริษัท เซเรบอส (ประเทศไทย) จำกัด
- เครือเบทาโกร
- บริษัท ไทยยามาฮ่ามอเตอร์ จำกัด

เอกสารประกอบคำบรรยาย

วิชา คณิตศาสตร์

ส่วนที่ 1 (O NET).....โดย อ.ตุลนันท์ นวลเพ็ญ..... หน้า 2-44
ส่วนที่ 2 (PAT 1).....โดย อ.ศุภฤกษ์ สกุลพรชัยเลิศ (ครู Sup'k).....หน้า 45-116
ส่วนที่ 3 (PAT 1).....โดย ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ..... หน้า 117-144

ประสานงานอาจารย์และจัดพิมพ์โดย **ชมรมบัณฑิตแนะแนว**
แจกฟรี ห้ามจำหน่าย

เซต

เซตจำกัด คือ เซตที่สามารถระบุจำนวนสมาชิกได้

เซตอนันต์ คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกมากมาย

เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก หรือมีจำนวนสมาชิกเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย ϕ หรือ $\{\ \}$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ A เป็นเซตจำกัด และ B เป็นเซตอนันต์ ข้อความใดต่อไปนี้**เป็นเท็จ**

1) มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ A
2) มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ B
*3) มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ A
4) มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ B

สับเซต

บทนิยาม เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และเขียนเป็นสัญลักษณ์ คือ $A \subset B$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เนื่องจากสมาชิกของเซต A ทุกตัวเป็นสมาชิกของเซต B ดังนั้น $A \subset B$

เพาเวอร์เซต

บทนิยาม เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสับเซตทั้งหมดของเซต A เขียนแทนด้วย P(A)

ตัวอย่างที่ 3 ให้ A = {1, 2, 3} จะได้สับเซตทั้งหมดของ A ได้แก่

ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

P(A) = $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

สมบัติของสับเซตและเพาเวอร์เซต

1. ϕ เป็นสับเซตของเซตทุกเซต
2. ϕ เป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซตเสมอ
3. $A \subset A$
4. $A \in P(A)$
5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
6. จำนวนสับเซตของเซต A ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)}$
7. จำนวนสมาชิกของ P(A) ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)}$

การดำเนินการทางเซต

1. **ยูเนียน** เซต A ยูเนียนกับเซต B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A **หรือ**เซต B เขียนแทนด้วย $A \cup B$

2. **อินเตอร์เซกชัน** เซต A อินเตอร์เซกชันกับเซต B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A **และ**เซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B$

3. **ผลต่าง** ผลต่างของ A และ B คือ เซตที่มีสมาชิกในเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกในเซต B เขียนแทนด้วย $A - B$

4. **คอมพลีเมนต์** ถ้า A เป็นเซตใดในเอกภพสัมพันธ์ U แล้ว คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย A'

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

$A = \{1, 2, 4, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 10\}$

จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$A - B = \{1, 8\}$

$B - A = \{6, 10\}$

$A' = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

และ $B' = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $A - B = \{2, 4, 6\}$, $B - A = \{0, 1, 3\}$ และ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1) $\{0, 1, 4, 5, 6, 7\}$ 2) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

*3) $\{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ 4) $\{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $A = \{1, 2, 3, ...\}$ และ $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7, 8, ...\}$ ข้อใดเป็นเท็จ

1) $A - B$ มีสมาชิก 5 ตัว

2) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ $B - A$ เท่ากับ 4

*3) จำนวนสมาชิกของ $(A - B) \cup (B - A)$ เป็นจำนวนคู่

4) $A \cap B$ คือเซตของจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 5

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

ให้ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A

1. $n(U) = n(A) + n(A')$
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
4. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้ากำหนดจำนวนสมาชิกของเซตต่างๆ ตามตารางต่อไปนี้

เซต	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cup C$	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$
จำนวนสมาชิก	25	27	26	30	7

แล้วจำนวนสมาชิกของ $(A \cap B) \cup C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) 23 2) 24 3) 25 4) 26

ตัวอย่างที่ 8 นักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 46 คน แต่ละคนมีเสื้อสีเหลืองหรือเสื้อสีฟ้าอย่างน้อยสีละหนึ่งตัว ถ้านักเรียน 39 คนมีเสื้อสีเหลือง และ 19 คนมีเสื้อสีฟ้า แล้วนักเรียนกลุ่มนี้ที่มีทั้งเสื้อสีเหลืองและเสื้อสีฟ้ามีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 9 2) 10 3) 11 *4) 12

ตัวอย่างที่ 9 นักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 50 คน มี 32 คน ไม่ชอบเล่นกีฬาและไม่ชอบฟังเพลง ถ้ามี 6 คน ชอบฟังเพลงแต่ไม่ชอบเล่นกีฬา และมี 1 คน ชอบเล่นกีฬาแต่ไม่ชอบฟังเพลง แล้วนักเรียนในกลุ่มนี้ที่ชอบเล่นกีฬาและชอบฟังเพลงมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) 11 คน 2) 12 คน 3) 17 คน 4) 18 คน

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ A และ B เป็นเซต ซึ่ง $n(A \cup B) = 88$ และ $n[(A - B) \cup (B - A)] = 76$ ถ้า $n(A) = 45$ แล้ว $n(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 45 2) 48 3) 53 *4) 55

ตัวอย่างที่ 11 ในการสอบถามพ่อบ้านจำนวน 300 คน พบว่ามีคนที่**ไม่ดื่ม**ทั้งชาและกาแฟ 100 คน มีคนที่ดื่มชา 100 คน และมีคนที่ดื่มกาแฟ 150 คน พ่อบ้านที่ดื่มทั้งชาและกาแฟมีจำนวนเท่าใด **(ตอบ 50 คน)**

ตัวอย่างที่ 12 ในการสอบของนักเรียนชั้นประถมกลุ่มหนึ่ง พบว่า มีผู้สอบผ่านวิชาต่างๆ ดังนี้

คณิตศาสตร์	36 คน
สังคมศึกษา	50 คน
ภาษาไทย	44 คน
คณิตศาสตร์และสังคมศึกษา	15 คน
ภาษาไทยและสังคมศึกษา	12 คน
คณิตศาสตร์และภาษาไทย	7 คน
ทั้งสามวิชา	5 คน

จำนวนผู้สอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชามีกี่คน **(ตอบ 101 คน)**

การให้เหตุผล

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีอยู่ 2 วิธี ได้แก่

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

หมายถึง วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริง จากการสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้งจากกรณีย่อยแล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

หมายถึง วิธีการสรุปข้อเท็จจริงโดยการนำความรู้พื้นฐาน ความเชื่อ ข้อตกลง หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยหรือนิรนัย

1) **เหตุ** 1. นัทชอบทานไอศกรีม
   2. แนทชอบทานไอศกรีม
   ผล เด็กทุกคนชอบทานไอศกรีม
2) **เหตุ** 1. เด็กทุกคนชอบทานไอศกรีม
   2. แนทเป็นเด็ก
   ผล แนทชอบทานไอศกรีม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า a จากแบบรูปของจำนวนที่กำหนดให้

1, 4, 9, 16, 25, a

2, 4, 8, 16, 32, a

ความสมเหตุสมผล

ส่วนประกอบของการให้เหตุผล

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

1. a เป็นสมาชิกของ A
2. a ไม่เป็นสมาชิกของ A

3. สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
4. ไม่มีสมาชิกตัวใดใน A เป็นสมาชิกของ B

5. สมาชิกบางตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
6. สมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดเหตุให้ดังต่อไปนี้

เหตุ ก. ทุกจังหวัดที่อยู่ไกลจากกรุงเทพมหานครเป็นจังหวัดที่มีอากาศดี
ข. เชียงใหม่เป็นจังหวัดที่มีอากาศไม่ดี

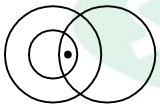
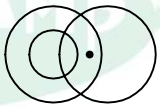
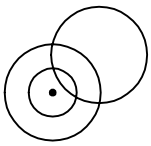
ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้**สมเหตุสมผล**

*1) เชียงใหม่เป็นจังหวัดที่อยู่ไม่ไกลจากกรุงเทพมหานคร
2) นราธิวาสเป็นจังหวัดที่อยู่ไม่ไกลจากกรุงเทพมหานคร
3) เชียงใหม่เป็นจังหวัดที่อยู่ไกลจากกรุงเทพมหานคร
4) นราธิวาสเป็นจังหวัดที่อยู่ไกลจากกรุงเทพมหานคร

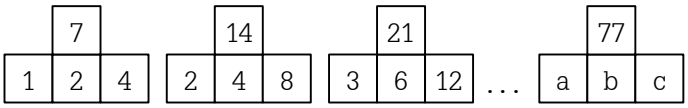
ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. คนตีกอล์ฟทุกคนเป็นคนสายตาดี
2. คนที่ตีกอล์ฟได้ไกลกว่า 300 หลา บางคน เป็นคนสายตาดี
3. ธงชัยตีกอล์ฟเก่งแต่ตีได้ไม่ไกลกว่า 300 หลา

แผนภาพในข้อใดต่อไปนี้ มีความเป็นไปได้ที่จะสอดคล้องกับข้อความทั้งสามข้างต้น เมื่อจุดแทนธงชัย

1) 
2)
3) 
*4) 

ตัวอย่างที่ 5 จากแบบรูปต่อไปนี้



โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย 2a – b + c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 11 2) 22 3) 33 *4) 44

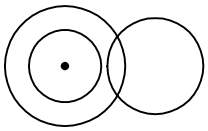
ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

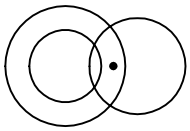
ก. นักกีฬาทุกคนมีสุขภาพดี

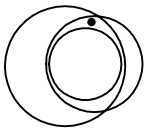
ข. คนที่มีสุขภาพดีบางคนเป็นคนดี

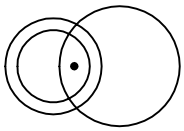
ค. ภราดรเป็นนักกีฬา และเป็นคนดี

แผนภาพในข้อใดต่อไปนี้ มีความเป็นไปได้ที่จะสอดคล้องกับข้อความทั้งสามข้อข้างต้น เมื่อจุดแทนภราดร

1) 

2) 

3) 

*4) 

ตัวอย่างที่ 7 **เหตุ** 1. ไม่มีคนขยันคนใดเป็นคนตกงาน

2. มีคนตกงานที่เป็นคนใช้เงินเก่ง

3. มีคนขยันที่ไม่เป็นคนใช้เงินเก่ง

ผล ในข้อใดต่อไปนี้ที่เป็นการสรุปผลจากเหตุข้างต้นที่เป็นไปอย่างสมเหตุสมผล

1) มีคนขยันที่เป็นคนใช้เงินเก่ง

*2) มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนตกงาน

3) มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนขยัน

4) มีคนตกงานที่เป็นคนขยัน

ตัวอย่างที่ 8 พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1. A

2. เห็ดเป็นพืชมีดอก

ผล เห็ดเป็นพืชชั้นสูง

ข้อสรุปข้างต้นสมเหตุสมผล ถ้า A แทนข้อความใด

1) พืชชั้นสูงทุกชนิดมีดอก

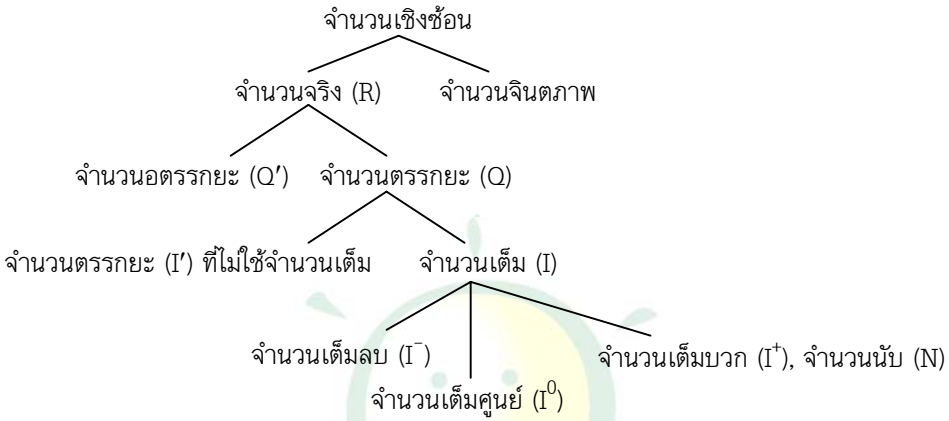
2) พืชชั้นสูงบางชนิดมีดอก

*3) พืชมีดอกทุกชนิดเป็นพืชชั้นสูง

4) พืชมีดอกบางชนิดเป็นพืชชั้นสูง

ระบบจำนวนจริง

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวน



จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, π, 2.17254... เป็นต้น

จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีจำนวน**ตรรกยะ**ที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0 ข. มีจำนวน**อตรรกยะ**ที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0

ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ผิด 2) ก. และ ข. ถูก 3) ก. ผิด และ ข. ถูก *4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ค่าประมาณที่ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3 ของ $\sqrt{3}$ และ $\sqrt{5}$ คือ 1.732 และ 2.236 ตามลำดับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $2.235 + 1.731 \leq \sqrt{5} + \sqrt{3} \leq 2.237 + 1.733$

ข. $2.235 - 1.731 \leq \sqrt{5} - \sqrt{3} \leq 2.237 - 1.733$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

*1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนที่เป็นจุดทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวนอตรรกยะ

ข. จำนวนที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ข้อใด**ถูกต้อง**

*1) ก. และ ข. 2) ก. เท่านั้น 3) ข. เท่านั้น 4) ก. และ ข. ผิด

สมบัติของจำนวนจริง

1. สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

กำหนดให้ a, b, c $\in$ R

1) สมบัติการสะท้อน

a = a

2) สมบัติการสมมาตร

ถ้า a = b แล้ว b = a

3) สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า a = b และ b = c แล้ว a = c

4) สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า a = b แล้ว a + c = b + c

5) สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า a = b แล้ว a + c = b + c

2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับพีชคณิต

กำหนดให้ a, b, c $\in$ R

สมบัติ	สมบัติของการบวก	สมบัติของการคูณ
สมบัติปิด	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	มี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก ซึ่ง $0 + a = a = a + 0$	มี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ ซึ่ง $1 \cdot a = a = a \cdot 1$
สมบัติการมีอินเวอร์ส	สำหรับจำนวนจริง a มีจำนวนจริง $-a$ ที่ $(-a) + a = 0 = a + (-a)$	สำหรับจำนวนจริง a ที่ $a \neq 0$ จะมี a^{-1} ที่ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

ตัวอย่างที่ 4 ให้ a และ b เป็นจำนวน**ตรรกยะ**ที่แตกต่างกัน

c และ d เป็นจำนวน**อตรรกยะ**ที่แตกต่างกัน

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. a – b เป็นจำนวนตรรกยะ ข. c – d เป็นจำนวนอตรรกยะ

ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. และ ข. ถูก *2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. สมบัติการมีอินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง b ที่ $b + a = 0 = a + b$

ข. สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณของจำนวนจริงกล่าวว่า สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง b ที่ $ba = 1 = ab$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. และ ข. ถูก *2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

ทบทวนสูตร

1. กำลังสองสมบูรณ์

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. กำลังสามสมบูรณ์

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3a^2b - b^3$

3. ผลต่างกำลังสอง

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

4. ผลต่างกำลังสาม

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

จากสมการพหุนามกำลังสอง

$ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงที่, $a \neq 0$

จะได้ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้ว x จะมี 2 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้ว x จะมี 1 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้ว x จะไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า $\frac{3}{4}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $4x^2 + bx - 6 = 0$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริงแล้ว อีกผลเฉลยหนึ่งของสมการนี้มีค่าตรงกับข้อใด

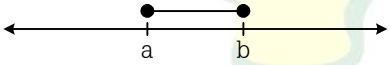
*1) -2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

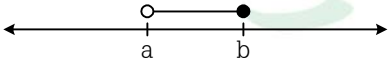
สมบัติของอสมการ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. สมบัติการถ่ายทอด
   ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนจริงที่เท่ากัน
   ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
   ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
   ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
4. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง
   จาก $a < x < b$
   จะได้ $a < x$ และ $x < b$

ช่วงของจำนวนจริง ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

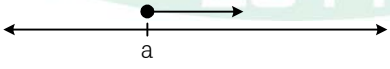
1. $(a, b) = \{x | a < x < b\}$
   เส้นจำนวน คือ

2. $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$
   เส้นจำนวน คือ 

3. $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$
   เส้นจำนวน คือ 

4. $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$
   เส้นจำนวน คือ

5. $(-\infty, a) = \{x | x < a\}$
   เส้นจำนวน คือ

6. $[a, \infty) = \{x | x \geq a\}$
   เส้นจำนวน คือ 

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ s, t, u และ v เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $s < t$ และ $u < v$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $s - u < t - v$ ข. $s - v < t - u$

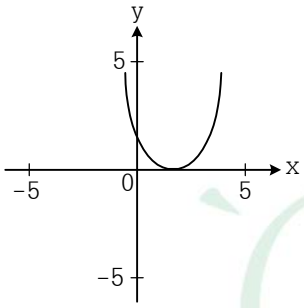
ข้อใด**ถูกต้อง**

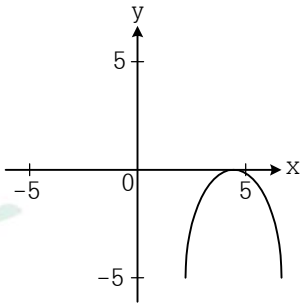
1) ก. และ ข. 2) ก. เท่านั้น *3) ข. เท่านั้น 4) ก. และ ข. ผิด

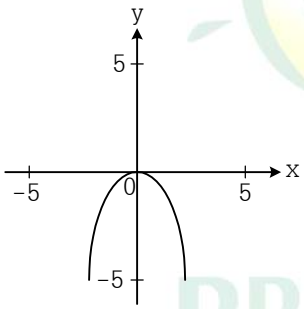
ตัวอย่างที่ 8 ต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 65 ตารางวา โดยด้านยาวของที่ดินยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 3 วา จะต้องใช้รั้วที่มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

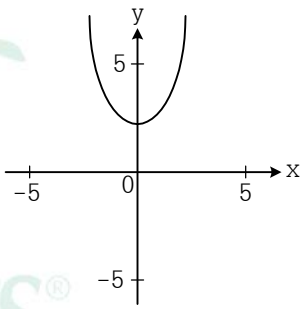
1) 30 วา *2) 36 วา 3) 42 วา 4) 48 วา

ตัวอย่างที่ 9 เมื่อเขียนกราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$ เพื่อหาคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ กราฟในข้อใดต่อไปนี้แสดงว่าสมการ**ไม่มีคำตอบ**ที่เป็นจำนวนจริง

1) 

2) 

3) 

*4) 

ตัวอย่างที่ 10 แม่ค้านำเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ 1 กิโลกรัม ถั่วลิสง 3 กิโลกรัม และเมล็ดฟักทอง 4 กิโลกรัม มาผสมกัน แล้วแบ่งใส่ถุง ถุงละ 100 กรัม ถ้าแม่ค้าซื้อเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ ถั่วลิสง และเมล็ดฟักทองมาในราคากิโลกรัมละ 250 บาท 50 บาท และ 100 บาท ตามลำดับ แล้วแม่ค้าจะต้องขายเมล็ดพืชผสมถุงละ 100 กรัมนี้ ในราคาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้จึงจะได้กำไร 20% เมื่อขายหมด

1) 10 บาท *2) 12 บาท 3) 14 บาท 4) 16 บาท

ตัวอย่างที่ 11 เซตคำตอบของอสมการ $-1 \leq \sqrt{2} + \frac{x}{1-\sqrt{2}} \leq 1$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1) $[\sqrt{2} - 1, 1]$ 2) $[\sqrt{2} - 1, 2]$

*3) $[3 - 2\sqrt{2}, 1]$ 4) $[3 - 2\sqrt{2}, 2]$

ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

1. $|x| = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ หรือ $x = -a$
2. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

   $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

   $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

   $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

   $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

ตัวอย่างที่ 12 พิจารณาสมการ $|x - 7| = 6$ ข้อสรุปใดต่อไปนี้**เป็นเท็จ**

1) คำตอบหนึ่งของสมการมีค่าระหว่าง 10 และ 15
2) ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการมีค่าเท่ากับ 14
*3) สมการนี้มีคำตอบมากกว่า 2 คำตอบ
4) ในบรรดาคำตอบทั้งหมดของสมการ คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าน้อยกว่า 3

ตัวอย่างที่ 13 จำนวนสมาชิกของเซต

$$\left\{ x \,\middle|\, x = \left(\left(a + \frac{1}{|a|} \right)^2 - \left(|a| - \frac{1}{a} \right)^2 \right) \text{ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับ 0} \right\}$$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 *2) 2
3) 3 4) มากกว่าหรือเท่ากับ 4

ตัวอย่างที่ 14 ผลบวกของคำตอบทุกคำตอบของสมการ $x^3 - 2x = |x|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0 2) $\sqrt{3}$ *3) $\sqrt{3} - 1$ 4) $\sqrt{3} + 1$

ตัวอย่างที่ 15 ผลเฉลยของสมการ $2|5 - x| = 1$ อยู่ในช่วงใด

1) $(-10, -5)$ 2) $(-6, -4)$ 3) $(-4, 5)$ *4) $(-3, 6)$

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คู่อันดับ (a, b) โดยที่ a คือ สมาชิกตัวหน้า และ b คือ สมาชิกตัวหลัง

บทนิยาม (a, b) = (c, d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

ผลคูณคาร์ทีเซียน กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

เช่น ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

จะได้ $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ

1. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
2. $A \times B \neq B \times A$
3. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
6. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
   $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b\}$ คู่อันดับในข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$

*1) (2, b) 2) (b, a) 3) (a, 1) 4) (1, 2)

ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับที่เกี่ยวข้องกันตามเงื่อนไขที่กำหนดและเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เขียนแทนด้วย $r \subset A \times B$

r เป็นความสัมพันธ์ใน A เขียนแทนด้วย $r \subset A \times A$

*จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B เท่ากับ $2^{n(A) \times n(B)}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$

$S = \left\{(a, b) \in A \times B \,\middle|\, b = 2a + \frac{a}{2}\right\}$

จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 *2) 2 3) 3 4) 4

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $r = \{(m, n) \in A \times A \mid m \leq n\}$ แล้วจำนวนสมาชิกในความสัมพันธ์ r เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 8 *2) 10 3) 12 4) 16

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r สัญลักษณ์ คือ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r สัญลักษณ์ คือ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

เช่น จาก $r = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$

จะได้ $D_r = \{-2, -1, 1\}$

และ $R_r = \{1, 4\}$

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ของ $r \subset R \times R$

1. โดเมน หาโดยจัดรูปสมการเป็น y ในรูปของ x และพิจารณาว่า x สามารถเป็นจำนวนจริงใดได้บ้างที่สามารถหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงได้
2. เรนจ์ หาโดยจัดรูปสมการเป็น x ในรูปของ y และพิจารณาว่า y สามารถเป็นจำนวนจริงใดได้บ้าง

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่คู่อันดับทุกๆ ตัวในความสัมพันธ์ ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับสองคู่เท่ากัน แล้วสมาชิกตัวหลังของทั้งสองคู่อันดับต้องเท่ากันด้วย

นั่นคือ r เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$

r ไม่เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ มี $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ ซึ่ง $y \neq z$

การตรวจสอบฟังก์ชัน

1. กรณี r เขียนแบบแจกแจงสมาชิก

ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ ซึ่งเป็นสมาชิกใน r จับคู่กับสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับมากกว่า 1 ตัวขึ้นไป r ไม่เป็นฟังก์ชัน

เช่น $r_1 = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 4)\}$

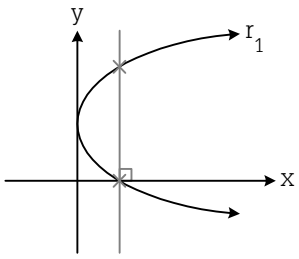
จะได้ r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ b จับคู่กับ 2 และ 3

$r_2 = \{(p, 2), (q, 4), (r, 6)\}$

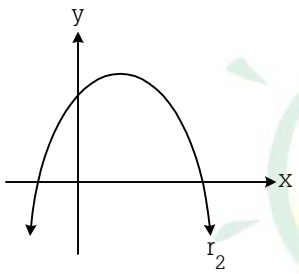
จะได้ r_2 เป็นฟังก์ชัน เพราะสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทุกตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

2. กรณี r วาดเป็นรูปกราฟ

ให้ลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน x ถ้ามีกรณีที่เส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับแกน x ตัดกับกราฟของ r เกิน 1 จุดขึ้นไป r ไม่เป็นฟังก์ชัน

เช่น 

เนื่องจากมีกรณีที่เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกับกราฟ r เกิน 1 จุด
ดังนั้น r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน



เนื่องจากไม่มีกรณีที่เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกับกราฟ r เกิน 1 จุด
ดังนั้น r_2 เป็นฟังก์ชัน

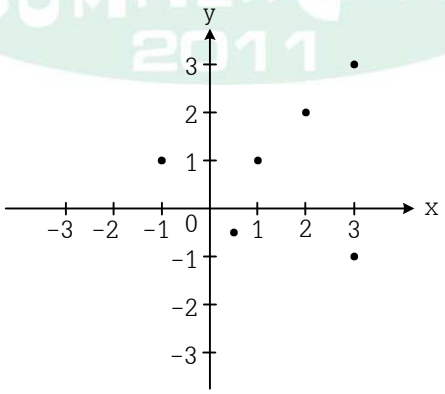
ตัวอย่างที่ 4 ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4)\}$
2) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
3) $\{(1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 4)\}$
*4) $\{(1, 3), (2, 1), (3, 3), (4, 1)\}$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ A = {1, 99} ความสัมพันธ์ใน A ในข้อใด**ไม่เป็น**ฟังก์ชัน

1) เท่ากับ
2) ไม่เท่ากับ
*3) หารลงตัว
4) หารไม่ลงตัว

ตัวอย่างที่ 6 จากความสัมพันธ์ r ที่แสดงด้วยกราฟดังรูป



ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

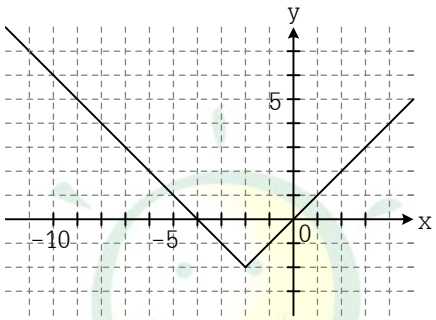
1) r เป็นฟังก์ชันเพราะ (1, 1), (2, 2) และ (3, 3) อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

2) r เป็นฟังก์ชันเพราะมีจำนวนจุดเป็นจำนวนจำกัด

*3) r ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีจุด (3, 3) และ (3, −1) อยู่บนกราฟ

4) r ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีจุด (1, 1) และ (−1, 1) อยู่บนกราฟ

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน f เป็นดังนี้



ค่าของ $11f(-11) - 3f(-3)f(3)$ คือข้อใด

1) 57 2) 68 3) 75 *4) 86

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $f(x) = \sqrt{3-x}$ และ $g(x) = -2 + |x - 4|$ แล้ว $D_f \cup R_g$ คือข้อใด

1) $(-\infty, 3]$ 2) $[-2, \infty)$ 3) $[-2, 3]$ *4) $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 9 จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชัน $f = \left\{(x, y) \middle| y = \frac{x}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1}\right\}$

1) −2 2) −1 *3) 0 4) 1

ฟังก์ชันประเภทต่างๆ

ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a, b \in \mathbf{R}$

ฟังก์ชันคงที่ (Constant Function) คือ ฟังก์ชันเชิงเส้นที่มี $a = 0$ กราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน X

ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbf{R}$ และ $a \neq 0$

ถ้า $a > 0$ กราฟหงาย มีจุดวกกลับเป็นจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน และถ้า $a < 0$ กราฟคว่ำ มีจุดวกกลับเป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชัน

ถ้ารูปทั่วไปของสมการ คือ $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c $\in$ **R** จุดวกกลับอยู่ที่ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ หรือ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

ถ้ารูปทั่วไปของสมการ คือ $f(x) = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ a, k $\in$ R และ $a \neq 0$ จุดวกกลับอยู่ที่ (h, k)

การแก้สมการโดยใช้กราฟ

1. ในกรณีที่กราฟไม่ตัดแกน x จะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง
2. กราฟของ $y = a(x + c)^2$ เมื่อ $c > 0$ จะตัดแกน x ที่จุด (−c, 0) สมการมีคำตอบเดียว คือ $x = -c$
   กราฟของ $y = a(x - c)^2$ เมื่อ $c > 0$ จะตัดแกน x ที่จุด (c, 0) สมการมีคำตอบเดียว คือ $x = c$
3. นอกเหนือจากนี้กราฟตัดแกน x สองจุด โดยพิจารณาจากการแก้สมการ หรือสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = |x - a| + c$ เมื่อ a, c $\in$ **R**

ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ **R** และมีค่าฟังก์ชันคงตัวเป็นช่วงๆ มากกว่าสองช่วง กราฟของฟังก์ชันจะมีรูปคล้ายบันได

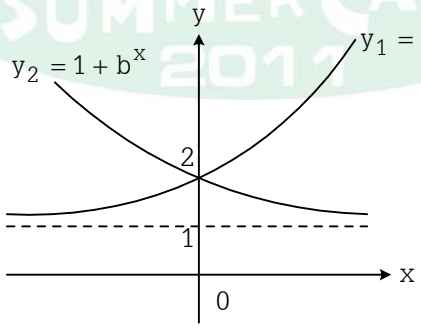
ตัวอย่างที่ 10 ค่าของ a ที่ทำให้กราฟของฟังก์ชัน $y = a(2^x)$ ผ่านจุด (3, 16) คือข้อใดต่อไปนี้

*1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

ตัวอย่างที่ 11 ทุก x ในช่วงใดต่อไปนี้ที่กราฟของสมการ $y = -4x^2 - 5x + 6$ อยู่เหนือแกน x

*1) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 2) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{4}, \frac{6}{7}\right)$ 4) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ถ้ากราฟของฟังก์ชัน $y_1 = 1 + a^x$ และ $y_2 = 1 + b^x$ มีลักษณะดังแสดงในภาพต่อไปนี้



ข้อใดต่อไปนี้เป็น**จริง**

1) $1 < a < b$ 2) $a < 1 < b$ *3) $b < 1 < a$ 4) $b < a < 1$

ตัวอย่างที่ 13 ถ้าเส้นตรง $x = 3$ เป็นเส้นสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^2 + (k + 5)x + (k^2 - 10)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง แล้ว f มี**ค่าสูงสุด**เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -4 *2) 0 3) 6 4) 14

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 15$ ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) $f(x) \geq -17$ ทุกจำนวนจริง x
2) $f(-3 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) > 0$
3) $f(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = f(1 - \sqrt{3} - \sqrt{5})$
*4) $f(-1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) > f(-1 - \sqrt{3} - \sqrt{5})$

ตัวอย่างที่ 15 ถ้า $f(x) = -x^2 + x + 2$ แล้วข้อใดสรุป**ถูกต้อง**

*1) $f(x) \geq 0$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 2$
2) จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน f อยู่ในจตุภาคที่สอง
3) ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดเท่ากับ 2
4) ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 16 ขบวนพาเหรดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขบวนหนึ่ง ประกอบด้วยผู้เดินเป็นแถว แถวละเท่าๆ กัน (มากกว่า 1 แถว และแถวละมากกว่า 1 คน) โดยมีเฉพาะผู้อยู่ริมด้านนอกทั้งสี่ด้านของขบวนเท่านั้น ที่สวมชุดสีแดง ซึ่งมีทั้งหมด 50 คน ถ้า x คือจำนวนแถวของขบวนพาเหรด และ N คือจำนวนคนที่อยู่ในขบวนพาเหรดแล้ว ข้อใด**ถูกต้อง**

1) $31x - x^2 = N$ 2) $29x - x^2 = N$
*3) $27x - x^2 = N$ 4) $25x - x^2 = N$

เลขยกกำลัง

สมบัติของเลขยกกำลัง

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ k เป็นจำนวนเต็ม

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(a^m \cdot b^n)^k = a^{mk} \cdot b^{nk}$
5. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^k = \frac{a^{mk}}{b^{nk}}, b \neq 0$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
7. $a^0 = 1, a \neq 0$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนที่มากกว่า 1

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

บทนิยาม กำหนด a เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ที่ ห.ร.ม ของ m และ n เท่ากับ 1

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

ตัวอย่างที่ 1 ค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{1/2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1 2) 1 *3) 3 4) 5

ตัวอย่างที่ 2 $(\sqrt{18} + 2\sqrt[3]{-125} - 3\sqrt[4]{4})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) -10 2) 10

3) $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$ 4) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 3 $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) $\frac{3}{10}$ 2) $\frac{7}{10}$

3) $\sqrt{5} - 2$ 4) $\sqrt{6} - 2$

ตัวอย่างที่ 4 $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{2^6}{(64)^{3/2}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) $-\frac{13}{24}$ 2) $-\frac{5}{6}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{19}{24}$

ตัวอย่างที่ 5 $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32})^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 60 2) $60\sqrt{2}$ 3) $100\sqrt{2}$ *4) 200

ตัวอย่างที่ 6 ข้อใดมีค่าต่างจากข้ออื่น

1) $(-1)^0$ *2) $(-1)^{0.2}$ 3) $(-1)^{0.4}$ 4) $(-1)^{0.8}$

ตัวอย่างที่ 7 $(|4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}| - |3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}| + |4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}|)^2$ เท่ากับข้อใด

*1) 0 2) 180 3) 192 4) 200

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคู่บวก

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(\sqrt[n]{a})^n = |a|$ ข. $(\sqrt[n]{a^n}) = |a|$

ข้อใด**ถูกต้อง**

*1) ก. และ ข. 2) ก. เท่านั้น 3) ข. เท่านั้น 4) ก. และ ข. ผิด

สมการในรูปเลขยกกำลัง

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ

จะได้ว่า 1. $a^m = a^n$ ก็ต่อเมื่อ $m = n$

2. $a^m = b^m$ ก็ต่อเมื่อ $m = 0$ และ $a, b \neq 0$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า $\left(\sqrt{\frac{8}{125}}\right)^4 = \left(\frac{16}{625}\right)^{1/x}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{3}{4}$ *2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{4}{3}$

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า $8^x - 8^{(x+1)} + 8^{(x+2)} = 228$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{3}$ *2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) $\frac{5}{3}$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า $\left(3+\frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) $-\frac{4}{9}$ 2) $-\frac{2}{9}$ 3) $-\frac{1}{9}$ 4) $\frac{1}{9}$

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า $4^a = \sqrt{2}$ และ $16^{-b} = \frac{1}{4}$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด **(ตอบ 0.75)**

ตัวอย่างที่ 13 ค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{2}^{(x^2)} = \frac{2^{(4x)}}{4^4}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 2 2) 3 *3) 4 4) 5

อสมการในรูปเลขยกกำลัง

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ

จะได้ว่า 1. $a^m < a^n$ และ $a > 1$ จะได้ว่า $m < n$

2. $a^m < a^n$ และ $0 < a < 1$ จะได้ว่า $m > n$

ตัวอย่างที่ 14 ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) $(24)^{30} < 2^{20} \cdot 3^{30} \cdot 4^{40}$ 2) $(24)^{30} < 2^{30} \cdot 3^{20} \cdot 4^{40}$

*3) $2^{20} \cdot 3^{40} \cdot 4^{30} < (24)^{30}$ 4) $2^{30} \cdot 3^{40} \cdot 4^{20} < (24)^{30}$

ตัวอย่างที่ 15 เซตคำตอบของอสมการ $4^{(2x^2-4x-5)} \leq \frac{1}{32}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1) $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 2) $\left[-\frac{5}{2}, 1\right]$ 3) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ *4) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

ตัวอย่างที่ 16 ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) $\sqrt{0.9+10} < \sqrt{0.9} + \sqrt{10}$ *2) $(\sqrt{0.9})(\sqrt[4]{0.9}) < 0.9$

3) $(\sqrt{0.9})(\sqrt[3]{1.1}) < (\sqrt{1.1})(\sqrt[3]{0.9})$ 4) $\sqrt[300]{125} < \sqrt[200]{100}$

ตัวอย่างที่ 17 อสมการในข้อใดต่อไปนี้**เป็นจริง**

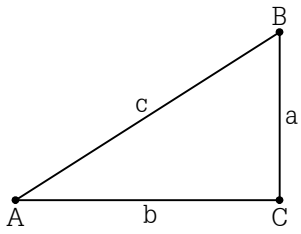
1) $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$ 2) $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$

*3) $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$ 4) $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้

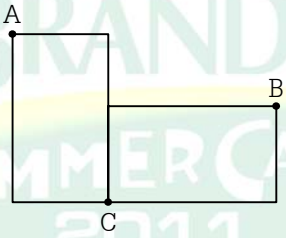


$c^2 = a^2 + b^2$

ตัวอย่างที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ 600 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 75% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งแล้ว เส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ ยาวกี่เซนติเมตร

*1) 120 2) 40 3) $60\sqrt{2}$ 4) $20\sqrt{2}$

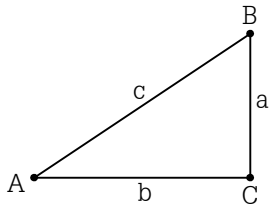
ตัวอย่างที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปมีขนาดเท่ากัน โดยมีเส้นทแยงมุมยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง ถ้านำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองมาวางต่อกันดังรูป จุด A และจุด B อยู่ห่างกันเป็นระยะกี่เท่าของด้านกว้าง



1) 1.5 2) 3 3) $\sqrt{2}$ *4) $2\sqrt{2}$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ไซน์ (sine) ของมุม A = $\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

โคไซน์ (cosine) ของมุม A = $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

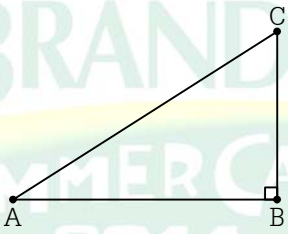
แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A = $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

$\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$

และยังมีอัตราส่วนอื่นๆ อีก คือ

1. $\csc A = \frac{1}{\sin A}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A}$
2. $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$
3. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
4. $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$
5. $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

ความสัมพันธ์ระหว่างมุม A กับมุม 90° – A ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



$\sin A = \cos (90° - A)$, $\csc A = \sec (90° - A)$

$\cos A = \sin (90° - A)$, $\sec A = \csc (90° - A)$

$\tan A = \cot (90° - A)$, $\cot A = \tan (90° - A)$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60°

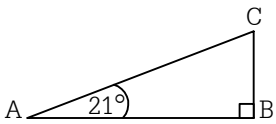
มุม	sin	cos	tan	csc	sec	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

การเปรียบเทียบมาตรการวัดมุมระบบอังกฤษและระบบเรเดียน

$360° = 2\pi$ เรเดียน $\quad 180° = \pi$ เรเดียน $\quad 90° = \frac{\pi}{2}$ เรเดียน

$60° = \frac{\pi}{3}$ เรเดียน $\quad 45° = \frac{\pi}{4}$ เรเดียน $\quad 30° = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**



*1) $\sin 21° = \cos 69°$

2) $\sin 21° = \cos 21°$

3) $\cos 21° = \tan 21°$

4) $\tan 21° = \cos 69°$

ตัวอย่างที่ 4 ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

*1) $\sin 30° < \sin 45°$ 2) $\cos 30° < \cos 45°$

3) $\tan 45° < \cot 45°$ 4) $\tan 60° < \cot 60°$

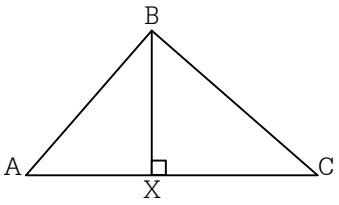
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ตาราง A ตาราง B และตาราง C เป็นตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่างๆ ดังนี้

ตาราง A	
θ	sin θ
40°	0.643
41°	0.656
42°	0.669

ตาราง B	
θ	cos θ
40°	0.766
41°	0.755
42°	0.743

ตาราง C	
θ	tan θ
40°	0.839
41°	0.869
42°	0.900

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก มุม C มีขนาด 41° และส่วนสูง BX ยาว 1 หน่วย แล้ว ความยาวของส่วนของเส้นตรง AX เป็นดังข้อใดต่อไปนี้



1) ปรากฏอยู่ในตาราง A
2) ปรากฏอยู่ในตาราง B
*3) ปรากฏอยู่ในตาราง C
4) ไม่ปรากฏอยู่ในตาราง A, B และ C

ตัวอย่างที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีความสูง 1 หน่วย แล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย *2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ หน่วย 3) $\frac{4}{3}$ หน่วย 4) $\frac{3}{2}$ หน่วย

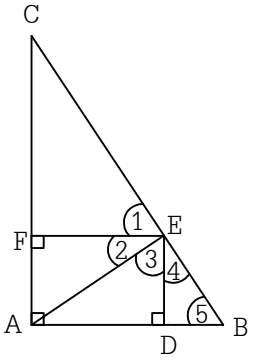
ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{2}{3}$ ถ้าด้าน BC ยาว 1 หน่วย แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ตารางหน่วย *2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ตารางหน่วย
3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ตารางหน่วย 4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ 12 หน่วย และ $\tan A\hat{B}D = \frac{1}{3}$ ถ้า AE ตั้งฉากกับ BD ที่จุด E แล้ว AE ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ หน่วย 2) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ หน่วย
3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ หน่วย *4) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 9



พิจารณารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ โดยที่ $C\hat{F}E$, $C\hat{A}B$, $A\hat{E}B$ และ $E\hat{D}B$ ต่างเป็นมุมฉาก ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) $\sin(\hat{1}) = \sin(\hat{5})$
2) $\cos(\hat{3}) = \cos(\hat{5})$
*3) $\sin(\hat{2}) = \cos(\hat{4})$
4) $\cos(\hat{2}) = \sin(\hat{3})$

ตัวอย่างที่ 10 พิจารณาตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่างๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
72°	0.951	0.309
73°	0.956	0.292
74°	0.961	0.276
75°	0.966	0.259

มุมภายในที่มีขนาดเล็กที่สุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 7, 24 และ 25 หน่วย มีขนาดใกล้เคียงกับข้อใด**มากที่สุด**

1) 15° *2) 16° 3) 17° 4) 18°

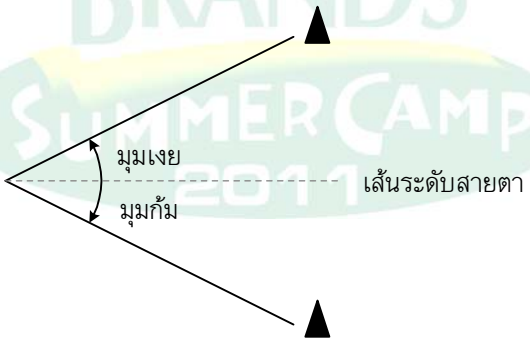
ตัวอย่างที่ 11 มุมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาดเท่ากับ 60 องศา ถ้าเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาว $3-\sqrt{3}$ ฟุตแล้ว ด้านที่ยาวเป็นอันดับสองมีความยาวเท่ากับข้อใด

1) $2-\sqrt{3}$ ฟุต 2) $2+\sqrt{3}$ ฟุต

*3) $2\sqrt{3}-3$ ฟุต 4) $2\sqrt{3}+3$ ฟุต

มุมก้มหรือมุมกดลง หมายถึง มุมที่วัดจากเส้นระดับสายตาไปยังเส้นแนวการมองเมื่อวัตถุอยู่ต่ำกว่าเส้นระดับสายตา

มุมเงยหรือมุมยกขึ้น หมายถึง มุมที่วัดจากเส้นระดับสายตาไปยังเส้นแนวการมองเมื่อวัตถุอยู่สูงกว่าเส้นระดับสายตา



ตัวอย่างที่ 12 กล้องวงจรปิดซึ่งถูกติดตั้งอยู่สูงจากพื้นถนน 2 เมตร สามารถจับภาพได้ต่ำที่สุดที่มุมก้ม 45° และสูงที่สุดที่มุมก้ม 30° ระยะทางบนพื้นถนนในแนวกล้องที่กล้องนี้สามารถจับภาพได้คือเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3}\approx 1.73$)

1) 1.00 เมตร *2) 1.46 เมตร 3) 2.00 เมตร 4) 3.46 เมตร

ลำดับและอนุกรม

ลำดับ (Sequences)

บทนิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกเรียกว่า **ลำดับจำกัด** (Finite Sequences)
ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **ลำดับอนันต์** (Infinite Sequences)

ตัวอย่างที่ 1 ใน 40 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3 + (-1)^n$ มีกี่พจน์ ที่มีค่าเท่ากับพจน์ที่ 40

1) 10 *2) 20 3) 30 4) 40

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequences)

บทนิยาม ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ n + 1 ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลต่างร่วม (Common difference)

1. เมื่อกำหนดให้พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ a_1 และผลต่างร่วม คือ d โดยที่ $d = a_{n+1} - a_n$ พจน์ที่ n ของลำดับนี้คือ $a_n = a_1 + (n - 1)d$
2. ลำดับเลขคณิต n พจน์แรก คือ $a, a + d, a + 2d, ..., a + (n - 1)d$

ตัวอย่างที่ 2 ลำดับเลขคณิตในข้อใดต่อไปนี้มีบางพจน์เท่ากับ 40

1) $a_n = 1 - 2n$ 2) $a_n = 1 + 2n$ *3) $a_n = 2 - 2n$ 4) $a_n = 2 + 2n$

ตัวอย่างที่ 3 พจน์ที่ 31 ของลำดับเลขคณิต $-\frac{1}{20}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{60}, ...$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{5}{12}$ 2) $\frac{13}{30}$ *3) $\frac{9}{20}$ 4) $\frac{7}{15}$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $a_1, a_2, a_3, ...$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง $a_{30} - a_{10} = 30$ แล้ว ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1.25 *2) 1.5 3) 1.75 4) 2.0

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}$ เป็นลำดับเลขคณิต ผลบวกของพจน์ที่ 40 และพจน์ที่ 42 เท่ากับข้อใด

1) -18 2) -19 *3) -37 4) -38

ตัวอย่างที่ 6 ในสวนป่าแห่งหนึ่ง เจ้าของปลูกต้นยูคาลิปตัสเป็นแถวดังนี้ แถวแรก 12 ต้น แถวที่สอง 14 ต้น แถวที่สาม 16 ต้น โดยปลูกเพิ่มเช่นนี้ ตามลำดับเลขคณิต ถ้าเจ้าของปลูกต้นยูคาลิปตัสไว้ทั้งหมด 15 แถว จะมีต้นยูคาลิปตัสในสวนป่านี้ทั้งหมดกี่ต้น **(ตอบ 390 ต้น)**

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequences)

บทนิยาม ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common ration)

1. เมื่อกำหนดพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตเป็น a_1 และอัตราส่วนร่วม คือ r โดยที่ $r = \frac{a_n + 1}{a_n}$ พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
2. ลำดับเรขาคณิต n พจน์แรก คือ $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ a_1, a_2, a_3 เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_3 = 200$ ถ้า a_2 คือค่าในข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้แล้วข้อดังกล่าวคือข้อใด

*1) -20 2) -50 3) 60 4) 100

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิต พิจารณาลำดับสามลำดับต่อไปนี้

ก. $a_1 + a_3$, $a_2 + a_4$, $a_3 + a_5$, ...

ข. a_1a_2 , a_2a_3 , a_3a_4 , ...

ค. $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, ...

ข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

*1) ทั้งสามลำดับ**เป็น**ลำดับเรขาคณิต
2) มีหนึ่งลำดับ**ไม่เป็น**ลำดับเรขาคณิต
3) มีสองลำดับ**ไม่เป็น**ลำดับเรขาคณิต
4) ทั้งสามลำดับ**ไม่เป็น**ลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 9 พจน์ที่ 16 ของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{625}, \frac{1}{125\sqrt{5}}, \frac{1}{125}, ...$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $25\sqrt{5}$
2) 125
*3) $125\sqrt{5}$
4) 625

ตัวอย่างที่ 10 ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต

*1) $a_n = 2^n \cdot 3^{2n}$ 2) $a_n = 2^n + 4^n$ 3) $a_n = 3^{n^2}$ 4) $a_n = (2n)^n$

อนุกรมเลขคณิต (Arinmetic Series)

เมื่อ	$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$	เป็นลำดับเลขคณิต
จะได้ว่า	$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$	เป็นอนุกรมเลขคณิต

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

คือ $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots \quad \vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

หรือ $$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

ตัวอย่างที่ 11 ค่าของ 1 + 6 + 11 + 16 + ... + 101 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 970 2) 1020 3) 1050 *4) 1071

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า $a_1, a_2, a_3, ...$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง $a_2 + a_3 + ... + a_9 = 100$ แล้ว $S_{10} = a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 120 *2) 125 3) 130 4) 135

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ S = {101, 102, 103, ... , 999} ถ้า a เท่ากับผลบวกของจำนวนคี่ทั้งหมดใน S และ b เท่ากับผลบวกของจำนวนคู่ทั้งหมดใน S แล้ว b - a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1) -550 2) -500 3) -450 4) 450

อนุกรมเรขาคณิต (Geometrics Series)

เมื่อ	$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$	เป็นลำดับเรขาคณิต
จะได้ว่า	$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$	เป็นอนุกรมเรขาคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ตัวอย่างที่ 14 ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 100 พจน์

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + \ldots + 199$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)} + \ldots + \frac{1}{199}$

3) $1 + 2 + 4 + \ldots + (2^{n-1}) + \ldots + 2^{199}$

*4) $\frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + \ldots + \frac{1}{5^{2n-1}} + \ldots + \frac{1}{5^{199}}$

ตัวอย่างที่ 15 ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + 256$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -171 2) -85 3) 85 *4) 171

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 2 ถ้า $S_{10} - S_8 = 32$ แล้วพจน์ที่ 9 ของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{16}{3}$ 2) $\frac{20}{3}$ 3) $\frac{26}{3}$ *4) $\frac{32}{3}$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า $a_2 = 8$ และ $a_5 = -64$ แล้วผลบวกของ 10 พจน์แรกของลำดับนี้เท่ากับข้อใด

1) 2048 2) 1512 *3) 1364 4) 1024

ความน่าจะเป็น

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

1. กฎการบวก ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งแบ่งออกเป็น k กรณี

โดยที่กรณีที่ 1 มีจำนวน n_1 วิธี

กรณีที่ 2 มีจำนวน n_2 วิธี

กรณีที่ 3 มีจำนวน n_3 วิธี

$\vdots \qquad \vdots$

กรณีที่ k มีจำนวน n_k วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการทำงานทั้งหมดจะเท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ วิธี

2. กฎการคูณ ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งแบ่งออกเป็น k ขั้นตอน

โดยที่ขั้นตอนที่ 1 มีจำนวน n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีจำนวน n_2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มีจำนวน n_3 วิธี

$\vdots \qquad \vdots$

ขั้นตอนที่ k มีจำนวน n_k วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการทำงานทั้งหมดจะเท่ากับ $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ วิธี

แฟกทอเรียล

นิยาม กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ขึ้นไป

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

เช่น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

* $0! = 1$

ตัวอย่างที่ 1 ในการคัดเลือกคณะกรรมการหมู่บ้านซึ่งประกอบด้วยประธานฝ่ายชาย 1 คน ประธานฝ่ายหญิง 1 คน กรรมการฝ่ายชาย 1 คน และกรรมการฝ่ายหญิง 1 คน จากผู้สมัครชาย 4 คน และหญิง 8 คน มีวิธีการเลือกคณะกรรมการได้กี่วิธี

1) 168 วิธี 2) 324 วิธี *3) 672 วิธี 4) 1344 วิธี

ตัวอย่างที่ 2 มาลีต้องการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C โดยต้องเดินทางผ่านไปยังเมือง B ก่อน จากเมือง A ไปเมือง B มาลีสามารถเลือกเดินทางโดยรถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบินได้ แต่จากเมือง B ไปเมือง C สามารถเดินทางไปทางเรือ รถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบิน ข้อใดต่อไปนี้คือจำนวนวิธีในการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C ที่จะต้องเดินทางโดยรถไฟเป็นจำนวน 1 ครั้ง

*1) 5 2) 6 3) 8 4) 9

ตัวอย่างที่ 3 ครอบครัวหนึ่งมีพี่น้อง 6 คน เป็นชาย 2 คน หญิง 4 คน จำนวนวิธีที่จะจัดให้คนทั้ง 6 คนยืนเรียงกันเพื่อถ่ายรูป โดยให้ชาย 2 คนยืนอยู่ริมสองข้างเสมอเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 12 วิธี 2) 24 วิธี 3) 36 วิธี *4) 48 วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ตู้นิรภัยมีระบบล็อกที่เป็นรหัสประกอบด้วยเลขโดด 0 ถึง 9 จำนวน 3 หลัก จำนวนรหัสทั้งหมดที่มีบางหลักซ้ำกัน คือเท่าใด **(ตอบ 280)**

ตัวอย่างที่ 5 จำนวนวิธีในการจัดให้หญิง 3 คน และชาย 3 คน นั่งเรียงกันเป็นแถว โดยให้สามีภรรยาคู่หนึ่งนั่งติดกันเสมอ มีทั้งหมดกี่วิธี **(ตอบ 240 วิธี)**

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองใดๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถทำนายผลล่วงหน้าได้

ความน่าจะเป็น คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ เขียนแทนด้วย P(E)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

โดยที่ n(E) คือ จำนวนของเหตุการณ์ที่สนใจ

n(S) คือ จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

สมบัติของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
4. $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$
5. $P(E) = 1 - P(E')$ เมื่อ $P(E')$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. การทดลองสุ่มเป็นการทดลองที่ทราบว่าผลลัพธ์อาจเป็นอะไรได้บ้าง

ข. แต่ละผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน

ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. และ ข. ถูก *2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 7 โรงเรียนแห่งหนึ่งมีรถโรงเรียน 3 คัน นักเรียน 9 คน กำลังเดินไปขึ้นรถโรงเรียนโดยสุ่ม ความน่าจะเป็นที่**ไม่มี**นักเรียนคนใดขึ้นรถคันแรกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ *2) $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ 3) $\left(\frac{1}{9}\right)^3$ 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^3$

ตัวอย่างที่ 8 โรงแรมแห่งหนึ่งมีห้องว่างชั้นที่หนึ่ง 15 ห้อง ชั้นที่สอง 10 ห้อง ชั้นที่สาม 25 ห้อง ถ้าครูสมใจต้องการเข้าพักในโรงแรมแห่งนี้โดยวิธีสุ่มแล้ว ความน่าจะเป็นที่ครูสมใจจะได้เข้าพักห้องชั้นที่สองของโรงแรมเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{10}$ *2) $\frac{1}{5}$ 3) $\frac{3}{10}$ 4) $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 9 ในการหยิบบัตรสามใบ โดยหยิบทีละใบจากบัตรสี่ใบ ซึ่งมีหมายเลข 0, 1, 2 และ 3 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขบนบัตรสองใบแรกน้อยกว่าตัวเลขบนบัตรใบที่สามเท่ากับข้อใด

*1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 10 กล่อง 12 ใบ มีหมายเลขกำกับเป็นเลข 1, 2, ... , 12 และกล่องแต่ละใบบรรจุลูกบอล 4 ลูก เป็นลูกบอลสีดำ สีแดง สีขาว และสีเขียว ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องแต่ละใบ ใบละ 1 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงจากกล่องหมายเลขคี่ และได้ลูกบอลสีดำจากกล่องหมายเลขคู่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\left(\frac{1}{12}\right)^2$ *2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{12}$ 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ 4) $\left(\frac{1}{12}\right)^4$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{5, 6, \ldots, 14\}$

และ $r = \{(m, n) | m \in A \text{ และ } n \in B\}$

ถ้าสุ่มหยิบคู่อันดับ 1 คู่ จากความสัมพันธ์ r แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้คู่อันดับ (m, n) ซึ่ง 5 หาร n แล้วเหลือเศษ 3 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{15}$ 2) $\frac{1}{10}$ *3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{3}{5}$

ตัวอย่างที่ 12 ช่างไฟคนหนึ่งสุ่มหยิบบันได 1 อันจากบันได 9 อัน ซึ่งมีความยาว 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 และ 12 ฟุต แล้วนำมาพาดกับกำแพง โดยให้ปลายข้างหนึ่งห่างจากกำแพง 3 ฟุต ความน่าจะเป็นที่บันไดจะทำมุมกับพื้นราบน้อยกว่า 60° มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{9}$ *2) $\frac{2}{9}$ 3) $\frac{3}{9}$ 4) $\frac{4}{9}$

ตัวอย่างที่ 13 ถ้าสุ่มตัวเลขหนึ่งตัวจากข้อมูลชุดใดๆ ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 101 ตัว แล้วข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

*1) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่ามัธยฐาน $< \frac{1}{2}$

2) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต $< \frac{1}{2}$

3) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่ามัธยฐาน $> \frac{1}{2}$

4) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต $> \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 14 ทาสีเหรียญสามอันดังนี้ เหรียญแรกด้านหนึ่งทาสีขาว อีกด้านหนึ่งทาสีแดง เหรียญที่สองด้านหนึ่งทาสีแดง อีกด้านหนึ่งทาสีฟ้า เหรียญที่สามด้านหนึ่งทาสีฟ้า อีกด้านหนึ่งทาสีขาว โยนเหรียญทั้งสามขึ้นพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหน้าต่างสีกันทั้งหมดเป็นดังข้อใด

1) $\frac{1}{2}$ *2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{1}{16}$

ตัวอย่างที่ 15 กล่องใบหนึ่งบรรจุสลากหมายเลข 1–10 หมายเลขละ 1 ใบ ถ้าสุ่มหยิบสลากจำนวนสองใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้สลากหมายเลขต่ำกว่า 5 เพียงหนึ่งใบเท่านั้นเท่ากับข้อใด

1) $\frac{2}{9}$ *2) $\frac{8}{15}$ 3) $\frac{2}{35}$ 4) $\frac{11}{156}$

ตัวอย่างที่ 16 ในการวัดส่วนสูงนักเรียนแต่ละคนในชั้น พบว่านักเรียนที่สูงที่สุดสูง 177 เซนติเมตร และนักเรียนที่เตี้ยที่สุดสูง 145 เซนติเมตร พิจารณาเซตของส่วนสูงต่อไปนี้

S = {H|H เป็นส่วนสูงในหน่วยเซนติเมตรของนักเรียนในชั้น}

T = {H = |$145 \leq H \leq 177$}

เซตใดถือเป็นปริภูมิตัวอย่าง (แซมเปิลสเปซ) สำหรับการทดลองสุ่มนี้

1) S และ T *2) S เท่านั้น

3) T เท่านั้น 4) ทั้ง S และ T ไม่เป็นปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 17 ในการคัดเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย ประธาน รองประธาน และเลขานุการอย่างละ 1 คน จากหญิง 6 คน และชาย 4 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้ จะมีประธานและรองประธานเป็นหญิงเท่ากับข้อใด

1) $\frac{1}{18}$ 2) $\frac{1}{12}$ 3) $\frac{1}{9}$ *4) $\frac{1}{3}$

สถิติ

สถิติเชิงพรรณนา (Descriptive) คือ การวิเคราะห์ขั้นต้นที่มุ่งวิเคราะห์ เพื่ออธิบายลักษณะกว้างๆ ของข้อมูลชุดนั้น เช่น การวัดค่าแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง ค่าวัดการกระจาย การแจกแจงความถี่ของข้อมูล และการนำเสนอผลสรุปด้วยตาราง แผนภูมิแท่ง เพื่ออธิบายข้อมูลชุดนั้น

สถิติเชิงอนุมาน (Inferential Statistice) คือ การวิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวอย่างเพื่ออ้างอิงไปถึงข้อมูลทั้งหมด

องค์ประกอบของสถิติ

1. การเก็บรวบรวมข้อมูล เช่น การสอบถาม การสังเกต การทดลอง เป็นต้น
2. การวิเคราะห์ข้อมูล โดยข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เพียงส่วนหนึ่ง เรียกว่า กลุ่มตัวอย่างและข้อมูลที่เลือกมาจากข้อมูลทั้งหมด เรียกว่า ประชากร
3. การนำเสนอข้อสรุป

ข้อมูล คือ ข้อความจริงหรือสิ่งที่บ่งบอกถึงสภาพ สถานการณ์หรือปรากฏการณ์ โดยที่ข้อมูลอาจเป็นตัวเลขหรือข้อความก็ได้

สารสนเทศหรือข่าวสาร คือ ข้อมูลที่ผ่านการวิเคราะห์เบื้องต้นหรือขั้นสูงแล้ว

ประเภทของข้อมูล

1. แบ่งตามวิธีเก็บ

1.1 ข้อมูลปฐมภูมิ คือ ข้อมูลที่ผู้ใช้เก็บรวบรวมเอง เช่น การสำมะโน การสำรวจกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ข้อมูลทุติยภูมิ คือ ข้อมูลที่ได้จากผู้อื่นเก็บรวบรวมไว้แล้ว เช่น รายงาน บทความ เป็นต้น

2. แบ่งตามลักษณะของข้อมูล

2.1 ข้อมูลเชิงปริมาณ คือ ข้อมูลที่ใช้แทนขนาดหรือปริมาณซึ่งวัดออกมาเป็นจำนวนที่สามารถนำมาใช้เปรียบเทียบกันได้โดยตรง

2.2 ข้อมูลเชิงคุณภาพ คือ ข้อมูลที่ไม่สามารถวัดออกมาได้โดยตรง แต่อธิบายลักษณะหรือคุณสมบัติในเชิงคุณภาพได้

ตัวอย่างที่ 1 ข้อใดต่อไปนี้**เป็นเท็จ**

1) สถิติเชิงพรรณนาคือสถิติของการวิเคราะห์ข้อมูลขั้นต้นที่มุ่งอธิบายลักษณะกว้างๆ ของข้อมูล
2) ข้อมูลที่เป็นหมายเลขที่ใช้เรียกสายรถโดยสารประจำทางเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ
*3) ข้อมูลปฐมภูมิคือข้อมูลที่ผู้ใช้เก็บรวบรวมจากแหล่งข้อมูลโดยตรง
4) ข้อมูลที่นักเรียนรวบรวมจากรายงานต่างๆ ที่ได้จากหน่วยงานราชการเป็นข้อมูลปฐมภูมิ

ตัวอย่างที่ 2 ครูสอนวิทยาศาสตร์มอบหมายให้นักเรียน 40 คน ทำโครงงานตามความสนใจ หลังจากตรวจรายงานโครงงานของทุกคนแล้ว ผลสรุปดังนี้

ผลการประเมิน	จำนวนโครงงาน
ดีเยี่ยม	3
ดี	20
พอใช้	12
ต้องแก้ไข	5

ข้อมูลที่เก็บรวบรวม เพื่อให้ได้ผลสรุปข้างต้นเป็นข้อมูลชนิดใด

1) ข้อมูลปฐมภูมิ เชิงปริมาณ
2) ข้อมูลทุติยภูมิ เชิงปริมาณ
*3) ข้อมูลปฐมภูมิ เชิงคุณภาพ
4) ข้อมูลทุติยภูมิ เชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

ข้อมูลเชิงปริมาณที่ใช้ในการวิเคราะห์ทางสถิติมีสองประเภท คือ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ ซึ่งจะเห็นค่าของข้อมูลทุกตัวและข้อมูลที่แจกแจงความถี่ จะเห็นเป็นอันตรภาคชั้น

ความกว้างของอันตรภาพชั้น = ขอบบน – ขอบล่าง

จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้น = (ขอบบน + ขอบล่าง) ÷ 2

ฮิสโทแกรม คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากวางเรียงต่อกันบนแกนนอน โดยมีแกนนอนแทนค่าของตัวแปร ความกว้างของสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนความกว้างของอันตรภาคชั้น และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนความถี่ของแต่ละอันตรภาคชั้น ซึ่งถ้าความกว้างของทุกชั้นเท่ากัน ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมจะแสดงความถี่

แผนภาพต้น-ใบ (Stem-and-Leaf Plot) เป็นวิธีการสร้างแผนภาพเพื่อแจกแจงความถี่และวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น โดยเริ่มจากการนำข้อมูลมาแบ่งกลุ่ม โดยใช้เลขหลักสิบ แล้วนำมาสร้างเป็นลำต้น (Stem) แล้วใช้เลขโดดในหลักหน่วยมาสร้างเป็นใบ (Leaf)

การวัดตำแหน่งของข้อมูล : มีสองขั้นตอน คือ การหาตำแหน่งและการหาค่า

1. ควอร์ไทล์ (Quartiles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน โดย Q_1, Q_2, และ Q_3 คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 3 ตัว

2. เดไซล์ (Deciles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆ กัน โดย D_1, D_2, ..., D_9 คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 9 ตัว

3. เปอร์เซ็นไทล์ (Percentiles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆ กัน มี P_1, ..., P_{99} คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 99 ตัว

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ Q_r คือ $\frac{r(N+1)}{4}$

ตำแหน่งของ D_r คือ $\frac{r(N+1)}{10}$

ตำแหน่งของ P_r คือ $\frac{r(N+1)}{100}$

การหาค่า : ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์

หมายเหตุ เมื่อหาค่าข้อมูลที่มีค่าสูงสุด ต่ำสุด Q_1, Q_2 และ Q_3 สามารถนำมาสร้างแผนภาพกล่อง (Box-and-Whisker Plot หรือ Box-Plot) โดยแผนภาพจะทำให้เราทราบถึงลักษณะการกระจายของข้อมูล

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต, Mean, $\bar{x}$

$\bar{x}$ ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

$\bar{x}$ ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่ $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{N}$

ข้อสังเกต 1. $\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$

2. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = 0$

3. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = \bar{x}$

4. ถ้า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x}$

$x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \ldots, x_n + k$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x} + k$

$x_1k, x_2k, x_3k, \ldots, x_nk$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x}k$

5. $\bar{x}$ รวม $= \dfrac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_2 + N_2}$

2. มัธยฐาน, Median, Me

Me สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

Me = ค่าของข้อมูลตำแหน่งตรงกลาง (ตัวที่ $\dfrac{N+1}{2}$) เมื่อเรียงลำดับข้อมูลแล้ว

ข้อสังเกต 1. การหามัธยฐานมีสองขั้นตอน คือ หาตำแหน่ง และหาค่าโดยใช้สูตรหรือการเทียบบัญญัติไตรยางค์

2. $\sum_{i=1}^{N} |x_i - a|$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $a = Me$

3. ฐานนิยม, Mode, Mo

Mo สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

Mo = ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด

ข้อสังเกต ใช้ได้กับข้อมูลเชิงคุณภาพ

ตัวอย่างที่ 3 ส่วนสูงของพี่น้อง 2 คน มีพิสัยเท่ากับ 12 เซนติเมตร มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 171 เซนติเมตร ข้อใดต่อไปนี้เป็นส่วนสูงของพี่หรือน้องคนใดคนหนึ่ง

1) 167 เซนติเมตร
2) 172 เซนติเมตร
3) 175 เซนติเมตร
*4) 177 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 4 ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 4, 9, 2, 7, 6, 5, 4, 6, 3, 4
ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < ฐานนิยม < มัธยฐาน
*2) ฐานนิยม < มัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
3) ฐานนิยม < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < มัธยฐาน
4) มัธยฐาน < ฐานนิยม < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 5 ความสูงในหน่วยเซนติเมตรของนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมี 10 คน เป็นดังนี้
155, 157, 158, 158, 160, 161, 161, 163, 165, 166
ถ้ามีนักเรียนเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งคน ซึ่งมีความสูง 158 เซนติเมตร แล้วค่าสถิติใดต่อไปนี้**ไม่เปลี่ยนแปลง**

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
2) มัธยฐาน
3) ฐานนิยม
*4) พิสัย

ตัวอย่างที่ 6 การเลือกใช้ค่ากลางของข้อมูลควรพิจารณาสิ่งต่อไปนี้ **ยกเว้น**ข้อใด

1) ลักษณะของข้อมูล
*2) วิธีจัดเรียงลำดับข้อมูล
3) จุดประสงค์ของการนำไปใช้
4) ข้อดีและข้อเสียของค่ากลางแต่ละชนิด

ตัวอย่างที่ 7 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของพนักงานของบริษัทแห่งหนึ่ง เท่ากับ 48.01 กิโลกรัม บริษัทนี้มีพนักงานชาย 43 คน และพนักงานหญิง 57 คน ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักพนักงานหญิงงเท่ากับ 45 กิโลกรัม แล้วน้ำหนักของพนักงานชายทั้งหมดรวมกันเท่ากับข้อใด

*1) 2,236 กิโลกรัม
2) 2,279 กิโลกรัม
3) 2,322 กิโลกรัม
4) 2,365 กิโลกรัม

ตัวอย่างที่ 8 แผนภาพต้น-ใบของน้ำหนักในหน่วยกรัมของไข่ไก่ 10 ฟอง เป็นดังนี้

5	7 8
6	7 8 9
7	0 4 4 7
8	1

ข้อสรุปใด**เป็นเท็จ**

1) ฐานนิยมของน้ำหนักไข่ไก่มีเพียงค่าเดียว
2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและมัธยฐานของน้ำหนักไข่ไก่มีค่าเท่ากัน
3) มีไข่ไก่ 5 ฟองที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 70 กรัม
*4) ไข่ไก่ที่มีน้ำหนักสูงกว่าฐานนิยม มีจำนวนมากกว่าไข่ไก่ที่มีน้ำหนักเท่ากับฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 9 สำหรับข้อมูลเชิงปริมาณใดๆ ที่มีค่าสถิติต่อไปนี้ ค่าสถิติใดจะตรงกับค่าของข้อมูลค่าหนึ่งเสมอ

1) พิสัย 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 3) มัธยฐาน *4) ฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 10 ข้อมูลต่อไปนี้แสดงน้ำหนักในหน่วยกิโลกรัม ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง

41, 88, 46, 42, 43, 49, 44, 45, 43, 95, 47, 48

ค่ากลางในข้อใดเป็นค่าที่เหมาะสมที่จะเป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนี้

*1) มัธยฐาน 2) ฐานนิยม

3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 4) ค่าเฉลี่ยของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

การวัดการกระจายของข้อมูล

1. พิสัย (Range) Range = $x_{max} - x_{min}$
2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation)

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

ข้อสังเกต 1. ความแปรปรวน (Variance) = $S.D.^2 = S^2$

2. $S.D. \geq 0$

3. $S.D. = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = \bar{x}$

4. ถ้า $x_1, x_2, ..., x_n$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น S.D. ความแปรปรวนเป็น $S.D.^2$

$x_1 + k, x_2 + k, ..., x_n + k$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น S.D. ความแปรปรวนเป็น $S.D.^2$

$x_1k, x_2k, ..., x_nk$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $S.D.|k|$ ความแปรปรวนเป็น $S.D.^2k^2$

5. The 95% Rule กล่าวว่า มีจำนวนข้อมูลที่อยู่ในช่วง $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ ประมาณ 95% ของจำนวนข้อมูลทั้งหมด

6. โดย The 95% Rule ได้ว่า $s \approx \frac{Range}{4}$

ความสัมพันธ์ของ $\bar{x}$, Me และ Mo

$\bar{x} = Me = Mo$	$\bar{x} > Me > Mo$	$\bar{x} < Me < Mo$
โค้งปกติ	**โค้งเบ้ขวา**	**โค้งเบ้ซ้าย**

การสำรวจความคิดเห็น

1. ขอบเขตของการสำรวจ กำหนดด้วยพื้นที่ ลักษณะผู้ให้ข้อมูล การมีส่วนได้ส่วนเสียกับข้อมูล

2. วิธีเลือกตัวอย่าง การสุ่มตัวอย่าง (Sampling) การเลือกตัวอย่างแบบชั้นภูมิ การเลือกตัวอย่างแบบหลายขั้นและการเลือกตัวอย่างแบบกำหนดโควตา

3. การสร้างแบบสำรวจความคิดเห็น แบบสำรวจที่ดีประกอบด้วย ลักษณะของผู้ตอบที่คาดว่ามีผลต่อการแสดงความคิดเห็น ความคิดเห็นของผู้ตอบในด้านต่างๆ และข้อเสนอแนะ โดยต้องไม่เป็นคำถามที่ชี้นำ และมีจำนวนไม่มากเกินไป ตลอดจนความสอดคล้องของความรู้ของผู้ให้ข้อมูลกับเรื่องที่สอบถาม

4. การประมวลผลและวิเคราะห์ความคิดเห็น

1. ร้อยละของผู้ตอบแบบสำรวจความคิดเห็นในแต่ละด้านที่เกี่ยวข้อง
2. ระดับความคิดเห็นเฉลี่ย

ตัวอย่างที่ 11 ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20 มัธยฐานเท่ากับ 25 และฐานนิยมเท่ากับ 30 ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

*1) ลักษณะการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายที่เบ้ทางซ้าย
2) ลักษณะการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายที่เบ้ทางขวา
3) ลักษณะการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายแบบสมมาตร
4) ไม่สามารถสรุปลักษณะการกระจายของข้อมูลได้

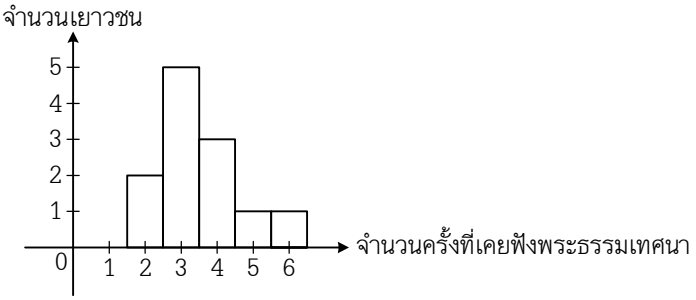
ตัวอย่างที่ 12 พิจารณาข้อมูลต่อไปนี้ 10, 5, 6, 9, 12, 15, 8, 18 ค่าของ P_{80} ใกล้เคียงกับข้อใดต่อไปนี้**มากที่สุด**

1) 15.1 2) 15.4 *3) 15.7 4) 16.0

ตัวอย่างที่ 13 ในกรณีที่มีข้อมูลจำนวนมาก การนำเสนอข้อมูลในรูปแบบใดต่อไปนี้ทำให้เห็นการกระจายของข้อมูลได้ชัดเจน**น้อยที่สุด**

1) ตารางแจกแจงความถี่ 2) แผนภาพต้น-ใบ
3) ฮิสโทแกรม *4) การแสดงค่าสังเกตทุกค่า

ตัวอย่างที่ 14 จากการสอบถามเยาวชนจำนวน 12 คน ว่าเคยฟังพระธรรมเทศนามาแล้วจำนวนกี่ครั้ง ปรากฏผลดังแสดงในแผนภาพต่อไปนี้



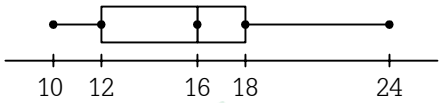
มัธยฐานของข้อมูลนี้คือข้อใด

*1) 3 ครั้ง 2) 3.25 ครั้ง 3) 3.5 ครั้ง 4) 4 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 15 ข้อใดต่อไปนี้มีผลกระทบต่อความถูกต้องของการตัดสินใจโดยใช้สถิติ **ยกเว้น**ข้อใด

1) ข้อมูล 2) สารสนเทศ 3) ข่าวสาร *4) ความเชื่อ

ตัวอย่างที่ 16 คะแนนสอบความรู้ทั่วไปของนักเรียน 200 คน นำเสนอโดยใช้แผนภาพกล่องดังนี้



ข้อใดเป็น**เท็จ**

1) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 12 ถึง 16 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 16 ถึง 18 คะแนน

*2) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 12 ถึง 18 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 18 ถึง 24 คะแนน

3) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 10 ถึง 12 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 18 ถึง 24 คะแนน

4) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 10 ถึง 16 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 16 ถึง 24 คะแนน

ตัวอย่างที่ 17 จากการตรวจสอบลำดับที่ของคะแนนสอบของนาย ก และนาย ข ในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีผู้เข้าสอบ 400 คน ปรากฏว่านาย ก สอบได้คะแนนอยู่ในตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 3 และนาย ข สอบได้คะแนนอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 60 จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนระหว่างคะแนนของนาย ก และนาย ข มีประมาณกี่คน

1) 15 คน 2) 30 คน 3) 45 คน *4) 60 คน

ตัวอย่างที่ 18 ข้อมูลชุดหนึ่ง มีบางส่วนถูกนำเสนอในตารางต่อไปนี้

อันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์
2–6			
7–11		11	0.2
12–16		14	
17–21	6		0.3

ช่วงคะแนนใดเป็นช่วงคะแนนที่มีความถี่สูงสุด

*1) 2–6 2) 7–11 3) 12–16 4) 17–21

ตัวอย่างที่ 19 จำนวนผู้ว่างงานทั่วประเทศในเดือนกันยายน ปี พ.ศ. 2551 มีจำนวนทั้งสิ้น 4.29 แสนคน ตารางเปรียบเทียบอัตราการว่างงานในเดือนกันยายน ปี พ.ศ. 2550 กับปี พ.ศ. 2551 เป็นดังนี้

พื้นที่สำรวจ	อัตราการว่างงานในเดือนกันยายน (จำนวนผู้ว่างงานต่อจำนวน ผู้อยู่ในกำลังแรงงานคูณ 100)	
	ปีพ.ศ. 2550	ปีพ.ศ. 2551
ภาคใต้	1.0	1.0
ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ	0.9	1.3
ภาคเหนือ	1.5	1.2
ภาคกลาง (ยกเว้นกรุงเทพมหานคร)	1.3	0.9
กรุงเทพมหานคร	1.2	1.2
ทั่วประเทศ	1.2	1.1

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนผู้ว่างงานในภาคใต้ในเดือนกันยายนของปี พ.ศ. 2550 และของปี พ.ศ. 2551 เท่ากัน

ข. จำนวนผู้อยู่ในกำลังแรงงานทั่วประเทศในเดือนกันยายนปี พ.ศ. 2551 มีประมาณ 39 ล้านคน

ข้อใด**ถูกต้อง**

1) ก. และ ข. 2) ก. เท่านั้น *3) ข. เท่านั้น 4) ก. และ ข. **ผิด**

ตัวอย่างที่ 20 ในการใช้สถิติเพื่อการตัดสินใจและวางแผน สำหรับเรื่องที่จำเป็นต้องมีการใช้ข้อมูลและสารสนเทศ ถ้าขาดข้อมูลและสารสนเทศดังกล่าว ผู้ตัดสินใจควรทำขั้นตอนใดก่อน

1) เก็บรวบรวมข้อมูล 2) เลือกวิธีวิเคราะห์ข้อมูล

3) เลือกวิธีเก็บรวบรวมข้อมูล *4) กำหนดข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

เนื้อหา ในส่วนที่ครูSup'kรับผิดชอบ	*PAT1 มี.ค.52*	*PAT1 ก.ค.52*	*PAT1 ต.ค.52*	*PAT1 มี.ค.53*	*PAT1 ก.ค.53*	*PAT1 ต.ค.53*
ระดับข้อสอบ	*ปานกลาง*	*ง่าย*	*ปานกลาง*	*ยาก*	*ยาก*	*ยากมาก*
โจทย์ปัญหาเชาวน์แนวจำนวนกับตัวเลข	-	-	-	3 ข้อ	3 ข้อ	3 ข้อ
โจทย์ปัญหาเชาวน์แนวโอเปอร์เรชั่นใหม่ๆ	-	-	-	1 ข้อ	1 ข้อ	2 ข้อ
โจทย์ปัญหาเชาวน์แนวลำดับ VS ทำนายตัวเลข	1 ข้อ	-	-	1 ข้อ	2 ข้อ	-
โจทย์ปัญหาเชาวน์แนวตรรกศาสตร์	2 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	-	-
โจทย์ปัญหาเชาวน์อื่นๆ	-	-	1 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	-
เอกโปเนนเชียล	2 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	4 ข้อ	3 ข้อ	2 ข้อ
ลอการิทึม	1 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	2 ข้อ	3 ข้อ
ตรรกศาสตร์	1 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ
ระบบจำนวนจริง	3 ข้อ	3 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ
ทฤษฎีจำนวน	1 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	-	1 ข้อ
เรขาคณิตวิเคราะห์	-	-	-	2 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ
ภาคตัดกรวย	4 ข้อ	4 ข้อ	5 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	2 ข้อ
ความสัมพันธ์	2 ข้อ	1 ข้อ	-	1 ข้อ	-	-
ฟังก์ชัน	1 ข้อ	2 ข้อ	2 ข้อ	2.5 ข้อ	3 ข้อ	2 ข้อ

เนื้อหา ในส่วนที่ครูSup'krับผิดชอบ	*PAT1 มี.ค.52*	*PAT1 ก.ค.52*	*PAT1 ต.ค.52*	*PAT1 มี.ค.53*	*PAT1 ก.ค.53*	*PAT1 ต.ค.53*
เมตริกซ์ และ ดีเทอร์-มินันต์	3 ข้อ	3 ข้อ	3 ข้อ	2 ข้อ	3 ข้อ	2 ข้อ
ตรีโกณพื้นฐานในวงกลม	–	–	–	0.5 ข้อ	–	–
ตรีโกณประยุกต์	1.5 ข้อ	1 ข้อ	1.5 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	2 ข้อ
อินเวอร์สตรีโกณ	1 ข้อ	1 ข้อ	0.5 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ
กฎของsin, กฎของ cos	0.5 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ	–	1 ข้อ	1 ข้อ
ลำดับอนุกรมพื้นฐาน	2 ข้อ	2 ข้อ	3 ข้อ	2 ข้อ	3 ข้อ	4 ข้อ
ลำดับเวียนบังเกิดแปลกๆ	1 ข้อ	1 ข้อ	–	–	2 ข้อ	3 ข้อ
อนุกรมประยุกต์แปลกๆ	–	1 ข้อ	–	1 ข้อ	1 ข้อ	3 ข้อ
โจทย์เซอร์ไพส์แนวโอลิมปิก	2 ข้อ	1 ข้อ	–	–	2 ข้อ	1 ข้อ
รวม	29 ข้อ	29 ข้อ	27 ข้อ	31 ข้อ	34 ข้อ	36 ข้อ
ข้อสอบทั้งหมด	50 ข้อ / 3 ชม.	50 ข้อ / 3 ชม.	50 ข้อ / 3 ชม.	50 ข้อ / 3 ชม.	50 ข้อ / 3 ชม.	50 ข้อ / 3 ชม.
หมายเหตุ	ช้อย 50 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน	ช้อย 50 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน	ช้อย 25 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน เติมคำ 25 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน	ช้อย 25 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน เติมคำ 25 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน	ช้อย 25 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน เติมคำ 25 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน	ช้อย 25 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน เติมคำ 25 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวเติมตัวเลขในตารางเก้าช่อง*

BRAN-Pb2.50 *(PAT1'ต.ค.53)* จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่างทั้งหมด 9 ช่อง ดังรูป

		7
x		
	10	3

Sup'k Tips

ให้เติมจำนวนเต็มบวก ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน

โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว ในแต่ละหลัก และในแต่ละแนวทแยงมุม มีค่าเท่ากัน

ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก 3, 7, 10 ดังปรากฏในตาราง แล้วจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด

แนวคิดเร็วๆ

ขั้นที่ 1

		7
x		
	10	3

ขั้นที่ 2

		7
x		
	10	3

ขั้นที่ 3 (แถม)

		7
	10	3

ขั้นที่ 4 (แถม)

		7
	10	3

ขั้นที่ 5 (แถม)

		7
	10	3

BRAN–Pb2.50

แนวคิดที่ 2 **ตอบ** 0004.00

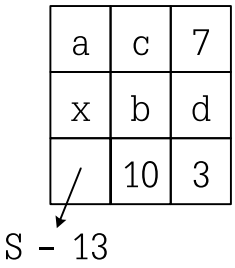
สมมติว่าผลบวกที่เท่ากันในแต่ละทิศทาง คือ s

จะได้ ช่องทางซ้ายล่างสุด เท่ากับ S – 13 (ดังรูป)

พิจารณาในแนวทแยง (จากมุมซ้ายล่างไปยังมุมขวาบน)

จะได้ $(S - 13) + b + 7 = S$

$b = 6$



พิจารณาในแนวทแยง (จากมุมซ้ายบนไปยังมุมขวาล่าง)

จะได้ $a + b + 3 = S$

$a + 9 = S$ ...(1)

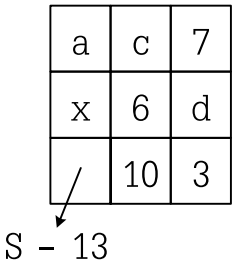
พิจารณาในแถวที่ 1

จะได้ $a + c + 7 = S$

$(a + 9) + c + 7 = S + 9$

$S + c + 7 = S + 9$ [โดย (1)]

$c = 2$



พิจารณาหลักที่ 2

จะได้ $S = c + 6 + 10 = 2 + 6 + 10 = 18$

โดย (1) จะได้ $a + 9 = 18$

$a = 9$

<u>ตารางที่สมบูรณ์</u>

พิจารณาหลักที่ 1

จะได้ $a + x + (S - 13) = S$

$9 + x - 13 = 0$

ดังนั้น $x = 4$ (ทำให้ได้ว่า d = 8)

9	2	7
4	6	8
5	10	3

BRAND'S SUMMER CAMP 2011

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวผลรวมตัวเลขในตาราง*

SheLL2.46 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้เติมจำนวนเต็มบวกลงในช่องสี่เหลี่ยม
โดยให้ผลรวมของจำนวนในช่องสี่เหลี่ยมสามช่องที่ติดกัน เท่ากับ 18

			7				x				8		

ค่าของ x เท่ากับเท่าใด ***ตอบ*** .....

SheLL2.47 *(PAT1'ก.ค.53)* จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่าง 16 ช่อง ดังรูป

	หลัก (ค)		หลัก (ง)	
แถว (ก)		1		5
แถว (ข)		x		13

ให้เติมจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, ..., 16 ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว (แถว (ก) และ แถว (ข)) และแต่ละหลัก (หลัก (ค) และ หลัก (ง)) มีค่าเท่า ๆ กัน ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก 1, 5, 13 ดังปรากฏในตารางแล้วจำนวน x ในตารางเท่ากับเท่าใด ***ตอบ*** .....

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวSudoku*

SheLL2.4 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้เติมจำนวนเต็มบวก 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ลงในช่องว่างของตาราง 5 × 5 ต่อไปนี้

	5	4		
1	3			
		5	3	
2		3	1	
				x

โดยที่แต่ละแถวต้องมีจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5
และแต่ละหลักต้องมีจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5
จงหาว่าจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด ***ตอบ*** .....

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวAlphabetic Problem*

BRAN-Pb1.24 *(PAT1'ต.ค.53)* พิจารณาการบวกของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ C\ D \\ \hline E\ F\ G \end{array}$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G แทนเลขโดดที่แตกต่างกัน โดยที่ F = 0
และ {A, B, C, D, E, G} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
ถ้าจำนวนสองหลัก AB เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว A + B มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 4 2) 5 3) 7 4) 9

แนวคิด

SupK-Pb2.28.2 *(ดักแนว PAT 1)*

ให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวที่แตกต่างกัน
แทน เลขโดดที่แตกต่างกัน
จงหาตัวเลขมาเติมตัวอักษรอังกฤษต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

เมื่อตัวอักษร O ในข้อนี้ คือ เลขศูนย์

SupK-Pb2.28.3 *(ดักแนว PAT 1)*

ให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวที่แตกต่างกัน
แทน เลขโดดที่แตกต่างกัน
จงหาตัวเลขมาเติมตัวอักษรอังกฤษต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} F\ A\ T\ H\ E\ R \\ +\ M\ O\ T\ H\ E\ R \\ \hline P\ A\ R\ E\ N\ T \end{array}$$

เมื่อตัวอักษร O ในข้อนี้ คือ เลขโดดใดๆ

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวทฤษฎีจำนวน*

BRAN-Pb2.43 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าผลบวกของสองจำนวนที่แตกต่างกันในเซต {a, b, c, d, e, f) มีทั้งหมด 15 จำนวน โดยที่ $a < b < c < d < e < f$ คือ 37, 50, 67, 72, 80, 89, 95, 97, 102, 110, 112, 125, 132, 147 และ 155 แล้วค่าของ c + d เท่ากับเท่าใด ***ตอบ*** .....

Sup'k Tips

แนวคิด

โจทย์ทฤษฎีจำนวน *แนวทฤษฎีการหารลงตัว*

BRAN-Pb1.25 *(PAT1'ต.ค.53)* สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ นิยาม $a * b$ หมายถึง $a = kb$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $x * y$ และ $y * z$ แล้ว $(x + y) * z$
2. ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (yz)$
3. ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (y + z)$
4. ถ้า $x * y$ แล้ว $y * x$

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวตรรกศาสตร์ ผมไม่ได้พูดโกหก VS นั่งติดกับคนโน้น ตรงข้ามคนนี้*

TF-PAT119. *(B-PAT1'ต.ค.51)* ในการจัดคน 5 คน ยืนเข้าแถวหน้ากระดาน พบว่า

- นาย ก ไม่ยืนข้างนาย ข
- นาย ค ยืนอยู่ริม
- นาย ง ยืนอยู่ข้างนาย จ และไม่ยืนอยู่กลางแถว

ข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้

1) นาย ก ยืนข้างนาย ข
2) นาย จ ยืนอยู่ริมด้านหนึ่ง
3) นาย ก ยืนอยู่ตรงกลาง
4) นาย จ ยืนอยู่ตรงกลาง

Sup'k หลัก

TF-PAT120. *(B-PAT1'ต.ค.51)* จากโจทย์ ข้อ เมื่อกี้ ถ้านาย ข ยืนอยู่ริมด้านหนึ่งแล้ว ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) นาย ค ยืนติดนาย ก
2) นาย ก ยืนอยู่ตรงกลาง
3) นาย จ ยืนอยู่ตรงกลาง
4) นาย ง ยืนติดกับนาย ข

TF-PAT123 *(PAT1'มี.ค.52)* ชาย 6 คน นาย ก, ข, ค, ง, จ และ ฉ ยืนเข้าแถวตอนตามลำดับ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

นาย ฉ ไม่ยืนติดกับนาย ข
นาย ฉ ยืนอยู่ในลำดับก่อนนาย ก
นาย ก ยืนติดนาย ง
นาย จ ยืนอยู่ลำดับที่ 4
ถ้านาย ฉ ยืนติดและอยู่หลังนาย ค แล้ว คนที่มีโอกาสอยู่ในลำดับที่ 5 ได้แก่ชายในข้อใดต่อไปนี้

1) นาย ข
2) นาย ค
3) นาย ง
4) นาย ฉ

TF-PAT124. *(PAT1'มี.ค.52)* จากเงื่อนไขในโจทย์ข้อที่แล้ว ข้อความใดต่อไปนี้**จริง**

1) นาย ง ยืนอยู่ในลำดับที่ 2
2) นาย ค ยืนอยู่ในลำดับที่ 3
3) นาย ง ยืนอยู่หลังนาย ข
4) นาย ข ยืนอยู่หลังนาย จ

โจทย์ปัญหาเชาวน์ *แนวระบบจำนวนจริง*

BRAN-Pb1.5 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้ $a * b = \sqrt{a + b}$ สำหรับ $a, b \in N$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(a * b) * c = a * (b * c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

ข. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก
2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4) ก. ผิด และ ข. ผิด

Sup'k Tips

Sup'k ลัด

แนวคิดเร็วๆ

วิธีจริง

สำหรับ $a, b \in N$ เรามีว่า $a * b = \sqrt{a + b}$

(ก) ผิด ,

$$(a * b) * c = (\sqrt{a + b}) * c = \sqrt{\sqrt{a + b} + c}$$

$$a * (b * c) = a * \sqrt{b + c} = \sqrt{a + \sqrt{b + c}}$$

$$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

(ข) ผิด , $a * (b + c) = \sqrt{a + b + c}$, $a * b = \sqrt{a + b}$, $a * c = \sqrt{a + c}$

เพราะว่า $\sqrt{a + b + c} \neq \sqrt{a + b} + \sqrt{a + c}$

$$\therefore a * (b + c) \neq (a * b) + (a * c)$$

ดังนั้น ทั้ง (ก) และ (ข) ผิดทั้งคู่

BRAN–Pb1.20 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ, สำหรับ a, b $\in$ N

$$a\Theta b = \begin{cases} a\ ,\ a > b \\ a\ ,\ a = b \\ b\ ,\ a < b \end{cases} \quad \text{และ} \quad a\Delta b = \begin{cases} b\ ,\ a > b \\ a\ ,\ a = b \\ a\ ,\ a < b \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้, สำหรับ a, b, c $\in$ N

(ก) $a\Theta b = b\Theta a$

(ข) $a\Theta(b\Theta c) = (a\Theta b)\Theta c$

(ค) $a\Delta(b\Theta c) = (a\Delta b)\Theta(a\Delta c)$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ถูก 1 ข้อ คือ ข้อ (ก)
2) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ (ก) และ (ข)
3) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ (ก) และ (ค)
4) ถูกทั้ง 3 ข้อ คือ ข้อ (ก), (ข) และ (ค)

KAiOU–Pb 1.24 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้ $a * b = a^b$ สำหรับ a, b $\in$ N พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ a, b, c $\in$ N

(ก) $a * b = b * a$

(ข) $(a * b) * c = a * (b * c)$

(ค) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

(ง) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ถูก 2 ข้อ คือ (ข) และ (ค)
2) ถูก 2 ข้อ คือ (ค) และ (ง)
3) ถูก 1 ข้อ คือ (ค)
4) (ก) (ข) (ค) และ (ง) ผิดทุกข้อ

SheLL2.49 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

กำหนดให้ $a \otimes b$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติต่อไปนี้

(ก) $a \otimes a = a + 4$ (ข) $a \otimes b = b \otimes a$ (ค) $\dfrac{a \otimes (a + b)}{a \otimes b} = \dfrac{a + b}{b}$

ค่าของ $(8 \otimes 5) \otimes 100$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ*** .....

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล *แนวเลขยกกำลัง ม.2*

สูตร 2.1 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ เมื่อ $a \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

สูตร 2.2 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^{m^n} = a^{(m^n)}$

สูตร 2.3

FPAT-Pb2 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้า $ab = 2$ แล้ว $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 4 2) 8 3) 64 4) 256

แนวคิดเร็วๆ

ถ้า $ab = 2$

จะหา แล้ว $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$

วิธีจริง จะหา $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} = 2^{(a+b)^2-(a-b)^2} = 2^{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}$

$= 2^{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2} = 2^{4 \cdot ab} = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$ ตอบ

QET-G-Pb 26.1 ถ้า $a = 1 - 2^n$ และ $x = 1 - 2^{-n}$ โดยที่ a และ n เป็นค่าคงตัว จงหา x

ก. $\frac{2-a}{1-a}$ ข. $\frac{a-2}{1-a}$ ค. $\frac{a}{1-a}$ ง. $\frac{a}{a-1}$

QET-G-Pb 23.2 จงหารูปอย่างง่ายของ $\left(\frac{a^{-2}b}{a^3 \cdot b^{-4}}\right)^{-3} \div \left(\frac{a \cdot b^{-1}}{a^{-3} \cdot b^2}\right)^5$

ก. $\frac{1}{a^5}$ ข. $\frac{1}{a^{-9}}$ ค. $\frac{1}{b^7}$ ง. $\frac{1}{b^{12}}$

QET-G-Pb 23.3 จงหา $\frac{2^{n+3}}{3^{-n-1}} \times \frac{3^{-n+2}}{5^{-n-1}} \times \frac{2^n - 2^{n-1}}{3 \times 2^n - 4 \times 2^{n-2}} \times \frac{2^{-n+2}}{5^{n+1}}$

ก. 4

ข. 864

ค. 870

ง. ไม่มีข้อถูก

Sup'k Tips

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล *แนวเปรียบเทียบความมากน้อยเลขยกกำลัง ม.2*

สูตร I เมื่อ $1 < $ ฐาน

เจอ $3.5^x < 3.5^y$

$\therefore$

สูตร II เมื่อ $0 <$ ฐาน < 1

เจอ $0.21^x < 0.21^y$

$\therefore$

สูตร III เมื่อ $1 <$ ฐาน

เจอ $\log_{7.8} x < \log_{7.8} y$

$\therefore$

สูตร IV เมื่อ $0 <$ ฐาน < 1

เจอ $\log_{0.42} x < \log_{0.42} y$

$\therefore$

KAiOU-Pb 1.22 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ $A = 7^{(7^7)}$, $B = 7^{77}$, $C = 77^7$ และ $D = (77^7)^7$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $B < A < C < D$ 2) $B < C < A < D$ 3) $C < B < D < A$ 4) $C < A < D < B$

SheLL1.24 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนด $a = 2^{48}$, $b = 3^{36}$, $c = 5^{24}$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$ 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ 3) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c}$ 4) $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$

*****DiAMK-Pb 1.25*** *(ดักแนว PAT 1)* ให้ $a = (10^{100})^{10}$, $b = 10^{(10^{10})}$, $c = 1000000!$, $d = (100!)^{10}$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $a < c < d < b$ 2) $a < d < c < b$ 3) $a < d < b < c$ 4) $a < b < c < d$

SheLL1.10 *(PAT1'ก.ค.53)* พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $2^{\frac{3}{2}} < 3^{\frac{4}{3}}$ ข. $\log_2\left(\frac{3}{8}\right) < \log_3\left(\frac{1}{2}\right)$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

DiAMK-Pb 1.2 *(ดักแนว PAT 1)* จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$ (ข) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูกต้อง 2) ข้อ (ก) ถูกต้อง และ ข้อ (ข) ผิด

3) ข้อ (ก) ผิด และ ข้อ (ข) ถูกต้อง 4) ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ผิด

KAiOU-Pb 1.11 *(PAT1'มี.ค.53)* เซตคำตอบของอสมการ $72^x + 72 < 2^{3x+3} + 3^{2x+2}$ เป็นสับเซตของช่วงใด

1) $(\log_8 7, \log_9 8)$ 2) $(\log_9 8, \log_8 9)$ 3) $(\log_8 9, \log_7 8)$ 4) $(\log_9 10, \log_8 9)$

การเลขยกกำลัง กับ รู้ด

สูตร 5.1

i) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

ii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

iii) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

พิสูจน์ ii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[mn]{a}$

iii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

สูตร 5.2

i) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

พิสูจน์ i) $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงหารูปอย่างง่ายของ

i) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^1\cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

ii) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^1\cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

iii) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} = \sqrt{a\cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^1\cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{1+\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{15}{8}}} = (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{15}{16}}$

ตัวอย่างที่ 5.2.2 จงหารูปอย่างง่ายของ $\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[5]{6a}}$ ***ตอบ***.....

แนวคิด

$\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[5]{6a}} = \sqrt[3]{a^4\cdot(6a)^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{a^4\cdot 6^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}}\cdot a^4\cdot a^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}}\cdot a^{4+\frac{1}{5}}}$

$= \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}}\cdot 6^{\frac{21}{5}}} = (6^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{21}{5}})^{\frac{1}{3}} = \{6^{\frac{1}{5}}\}^{\frac{1}{3}}\cdot[a^{\frac{21}{5}}]^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{21}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{15}}\cdot a^{\frac{21}{15}} = \sqrt[15]{6^1}\cdot\sqrt[15]{a^{21}}$

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล *แนวสมการเลขยกกำลัง แบบ ฐานติดตัวแปร*

BRAN-Pb2.29 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $C = \{x \in R \mid (3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2+4x+1)} = 1\}$ จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด ***ตอบ*** .....

แนวคิดเร็วๆ

Sup'k ลัด

แนวคิดที่ 2

Sup'k-Pb2.29.1 *(ดักแนว PAT1)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $C = \{x \in R \mid (x - 3)^{x^2 - 8x + 15} = 1\}$ จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

Sup'k-Pb2.29.2 *(ดักแนว PAT1)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $C = \left\{x \in R \mid x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5 + \log x}\right\}$ จงหา n(C) ***ตอบ***.....

FPAT-Pb14 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ x, y > 0 ซึ่งสอดคล้องกับ $x^y = y^x$ และ $y = 5x$ จงหาว่า ค่าของ x อยู่ในช่วงใด

1) [0, 1) 2) [1, 2) 3) [3, 4) 4) [5, 6)

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล *แนวสมการเลขยกกำลัง*

สูตร 5.1	$a^x = a^y$	$\rightarrow$	$\therefore x = y$	เมื่อ $a \neq -1, 0, 1$
สูตร 5.2	$a^x = b^x$	$\rightarrow$	$\therefore x = 0$	เมื่อ $a, b \neq -1, 0, 1$

พิสูจน์ สูตร 5.2 จาก $a^x = b^x \rightarrow \frac{a^x}{b^x} = 1 \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \rightarrow \therefore x = 0_{\text{จบ}}$

FPAT-Pb1 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้า $6^{a+b} = 36$ และ $5^{a+2b} = 125$ แล้วค่าของ a มีค่าเท่าใด

1) 1 2) 1.5 3) 2 4) 2.5

FPAT-Pb3 *(PAT1'มี.ค.52)* ถ้า $4^{x-y} = 128$ และ $3^{2x+y} = 81$ แล้วค่าของ y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) −2 2) −1 3) 1 4) 2

SheLL1.11 *(PAT1'ก.ค.53)* ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^{2x+2} - 28\cdot(3^x) + 3 = 0$
และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log x + \log(x - 1) = \log(x + 3)$
แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

AVATAR-Pb 5.1 *(แนวสอบตรงแพทย์ กสพท'53)* กำหนด $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} - 2^{4x+5} = 0$
จงหาว่า $x^2 - 2x$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

KMK-Pb 1.8 *(PAT1'ต.ค.52)* ถ้า $x > 0$ และ $8^x + 8 = 4^x + 2^{x+3}$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1) [0, 1) 2) [1, 2) 3) [2, 3) 4) [3, 4)

****KAiOU-Pb 1.12*** *(PAT1'มี.ค.53)* ถ้าสมการ $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงบวก
แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1) $(-\infty, -3)$ 2) $(-3, 0)$ 3) $(0, 1)$ 4) $(1, 3)$

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล *แนวสมการเลขยกกำลังโอลิมปิก*

FPAT-Pb4 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดสมการ $\left(\frac{4}{25}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ แล้ว $a > 1$

ข. ถ้าสมการมีคำตอบ แล้วคำตอบจะมีเพียงคำตอบเดียว

ข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล *แนวสมการติดรู้ด*

Sup'k Tips

Sup'k ระวัง

BRAN-Pb2.27 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $A = \{x \in R \mid 2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 15\}$

แล้วผลบวกของกำลังสองของสมาชิกในเซต A เท่ากับเท่าใด **ตอบ**.....

KAiOU-Pb 2.2 *(PAT1'มี.ค.53)* ถ้า $S = \{x \in R \mid \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7x+1}\}$

เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง แล้วผลบวกของสมาชิกใน S เท่ากับเท่าใด **ตอบ**.....

SheLL2.27 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $S = \{x \in R \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{7x-1}\}$

และ $T = \{y \in R \mid y = 3x + 1, x \in S\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

สูตรของ log

$\log_a x$

สูตร 10.1! $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$

สูตร 10.2! $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

สูตร 10.3! $\log_a a = 1$

สูตร 10.4! $\log_a 1 = 0$

สูตร10.5! $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$

สูตร10.6! $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

สูตร10.7! $\log_a x^n = \log_{a^{1/n}} x$

สูตร10.8! $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

สูตร10.9! $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

สูตร10.10! $x^{\log_b a} = a^{\log_b x}$

เอ็กซ์กำลัง ล็อกa นั้นยากอยู่

♫ *ฝากหัวใจ ให้กัน เอาไว้ก่อน*

เปลี่ยนสูตร โดยสลับ x และ a

♫ *ที่เรา จะต้องห่าง เหินไป*

ระวัง10.1! $\log (x + y) \neq \log x + \log y$

ระวัง10.2! $\log (x - y) \neq \log x - \log y$

$e \approx 2.7182$

$\log_{10} x = \log x$

$\log_e x = \ln x$

สูตร10.11! $b^{\log_b a} = a$

ต่อด้วยสูตร ฐาน log และ expo

♫ *เผื่อว่าเรา ลำบากอยู่หนใด*

เหมือนกัน ให้เอาหลัง log มาตอบ

♫ *หัวใจ ก็ยังมีคน ดูแล*

ตัวอย่าง 10.1

- **จำ** $\log 2 \approx 0.30103$
- $\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot (\log 2) \approx 2 \cdot (0.30103) = 0.60206$
- $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 1 - 0.30103 = 0.69897$
- $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot (\log 2) \approx 3 \cdot (0.30103) = 0.90309$

สูตร10.12! $\log 2 = 1 - \log 5$

♫ *อาจจะมีบางคราว เราพบใครใหม่*

สูตร10.13! และ $\log 5$ ก็ $= 1 - \log 2$

♫ *เกิดหวั่นไหว ไปตามประสาคนไกลกัน*

ตัวอย่าง 10.3

- **จำ** $\log 3 \approx 0.4771$
- $\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \approx 0.30103 + 0.4771 = 0.77813$
- $\log 9 = \log 3^2 = 2 \cdot (\log 3) \approx 2 \cdot (0.4771) = 0.9542$

ระวัง10.4!

ตัวอย่าง 10.5 จงหาค่าของ $\log_3 15 + \log_3 12 + \log_3 5 - \log_3 9$

วิธีทำ $= \log_3 \left(\frac{15 \times 12 \times 15}{9} \right) = \log_3 100 = \log_3 10^2 = 2 \cdot (\log_3 10)$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{\log_{10} 3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\log 3} \right) \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{0.4771} \right)$

- **จำ** $\log 1 = 0$
- **จำ** $\log 7 \approx 0.84509$
- $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

โจทย์ลอการิทึม *แนวสูตรพื้นฐาน*

BRAN-Pb2.35 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1

ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

แล้วจงหาค่าของ $a^{(\log_b c\ -\ 1)}b^{(\log_c d\ -1)}c^{(\log_d a\ -1)}d^{(\log_a b\ -1)}$ ***ตอบ*** .....

สูตร 10.3! $\log_m m = 1$

วิธีเร็วๆ

ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

จะหาค่าของ $a^{(\log_b c\ -\ 1)}b^{(\log_c d\ -1)}c^{(\log_d a\ -1)}d^{(\log_a b\ -1)}$

วิธีจริง

สูตร 10.8! $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

สูตร 10.9! $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

สูตร 10.11! $b^{\log_b a} = a$

ต่อด้วยสูตร ฐาน log และ expo

เผื่อว่าเรา ลำบากอยู่หนใด

เหมือนกัน ให้เอาหลัง log มาตอบ

หัวใจ ก็ยังมีคน ดูแล

เพราะว่า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

$$\frac{\log a}{\log b}\cdot\frac{\log c}{\log d} = 1$$

จะได้ $(\log_d a)(\log_b c) = 1$

ฉะนั้น $\log_b c = \dfrac{1}{\log_d a} = \log_a d$, $\log_c d = \dfrac{1}{\log_d c} = \log_b a$

$\log_d a = \dfrac{1}{\log_b c} = \log_c b$, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} = \log_d c$

$$\therefore\ a^{(\log_b c\ -1)}b^{(\log_c d\ -1)}c^{(\log_d a\ -1)}d^{(\log_a b\ -1)} = \frac{a^{\log_b c}\cdot b^{\log_c d}\cdot c^{\log_d a}\cdot d^{\log_a b}}{abcd}$$

$$= \frac{a^{\log_a d}\cdot b^{\log_b a}\cdot c^{\log_c b}\cdot d^{\log_d c}}{abcd}$$

$$= \frac{d\cdot a\cdot b\cdot c}{abcd} = 1$$

โจทย์เพิ่มเติมลอการิทึม *แนวสูตรพื้นฐาน*

SheLL1.14 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

และ $y = \frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$ จงหาค่าของ x^y เท่ากับข้อใด

1) $-\frac{1}{8}$
2) $\frac{1}{8}$
3) -27
4) 27

FPAT-Pb9 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1

โดยที่ $\log_a d = 30$, $\log_b d = 50$ และ $\log_{abc} d = 15$ จงหาว่าค่าของ $\log_c d$ เท่ากับเท่าใด

1) 75
2) 120
3) 150
4) 180

FPAT-Pb8 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $m \cdot \log_{50} 5 + n \cdot \log_{50} 2 = 1$

แล้ว m + n เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 2
2) 3
3) 4
4) 6

KAiOU-Pb 1.10 *(PAT1'มี.ค.53)* กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก และ $y \neq 1$

ถ้า $\log_y 2x = a$ และ $2^y = b$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{2}(\log_2 b)^a$
2) $2 \cdot (\log_2 b)^a$
3) $\frac{a}{2}(\log_2 b)$
4) $2a \cdot (\log_2 b)$

FPAT-Pb7 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้า $4(\log a)^2 + 9(\log b)^2 = 12(\log a)(\log b)$ แล้วข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

1) $b^2 = a$
2) $a^2 = b$
3) $a^3 = b^2$
4) $a^2 = b^3$

โจทย์ลอการิทึม *แนวสูตรพื้นฐาน VS ผลบวกราก, ผลคูณราก*

BRAN-Pb1.10 *(PAT1'ต.ค.53)* ถ้า a, b และ c เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$

แล้ว จงหา $\log_{27}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) 1

แนวคิดเร็ว

เทคนิคลั่นล้า กับ ครู Sup'k

ผลคูณราก คือ..... *ผลบวกราก คือ.....*

♫ จับมือไว้แล้วไปด้วยกัน เหมือนว่าไม่มีวันจะพรากไป

แล้วไล่เครื่องหมาย + , − , − , ...

♫ ทำอะไรได้ดั่งฝันใฝ่ ถ้าเราร่วมใจ

แต่ขอให้..... *co-ef หน้าสุด ต้องเป็น .....*

♫ จุดหมายที่ฝันกันไว้ ก็คงไม่เกินมือเรา

$1\cdot x^3 + k\cdot x^2 - 18x + 2 = 0$

ผลบวกราก = $a + b + c$ = ...

$a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a$ = ...

ผลคูณราก = $a\cdot b\cdot c$ = ...

แนวคิดที่ 2

ขั้นที่ 1 เนื่องจาก x = a, b, c เป็นราก$_{(\text{เป็นคำตอบ})}$ของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$

จึงได้ว่า $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = (x - a)(x - b)(x - c)$

$x^3 + kx^2 - 18x + 2 = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$

เทียบสัมประสิทธิ์

ฉะนั้น $ab + bc + ca = -18$ และ $abc = -2$

ขั้นที่ 2 จะหา $\log_{27}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ = หา ค.ร.น. เพื่อรวมเศษส่วน $= \log_{27}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{bc}{bc}+\frac{1}{b}\cdot\frac{ac}{ac}+\frac{1}{c}\cdot\frac{ab}{ab}\right)$

$= \log_{27}\left(\frac{bc + ac + ab}{abc}\right) = \log_{27}\left(\frac{-18}{-2}\right) = \log_{27} 9$

$= \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3}\cdot(\log_3 3) = \frac{2}{3}\cdot(1) = \frac{2}{3}$ ตอบ

โจทย์ลอการิทึม *แนวแก้สมการ log*

สูตร I	**สูตร II**
เจอ $\log_m$ ♥ = $\log_m$ □ →	**เจอ** $\log_5$ ♥ = 7 → .....

BRAN-Pb1.11 *(PAT1'ต.ค.53)* เซตคำตอบของสมการ $\log_3^2 x - \log_{27} x^3 = 6$ ตรงกับเซตคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้

1) $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 0$

2) $2 \cdot \log_2(x + 1) - \log_2(x^2 - 14x + 41) = 1$

3) $3^{(1+\sqrt{x^2 - 8x + 5})} + 3^{(2-\sqrt{x^2 - 8x - 5})} = 28$

4) $\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$

Sup'k Tips	**Sup'k ระวัง**	$\log_m$ ♥

โจทย์เพิ่มเติมลอการิทึม *แนวแก้สมการ log*

FPAT-Pb11 *(PAT1'ก.ค.52)* เซตคำตอบของสมการ $\log_{\sqrt{2}}(4 - x) = \log_2(9 - 4x) + 1$

เป็นสับเซตของช่วงใด

1) $[-9, -7)$
2) $[-7, -2)$
3) $[-2, 2)$
4) $[2, 7)$

KMK-Pb 2.10 *(PAT1'ต.ค.52)* รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ $2^{\log(x-2)} \cdot 2^{\log(x-3)} = 2^{\log 2}$ มีค่าเท่าใด ***ตอบ***.....

FPAT-Pb12 *(PAT1'มี.ค.52)* ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ อยู่ในช่วงใด

1) [0, 4) 2) [4, 8) 3) [8, 12) 4) [12, 16)

KMK-Pb 2.9 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ $\log_y x + 4\log_x y = 4$ แล้ว $\log_y x^3$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์แนวใหม่เซอร์ไพส์ *แนว*.....

Sup'k ระวัง

Sup'k Tips1.1

Sup'k Tips1.2

สูตรแถม1.3

Sup'k-Pb2.28.1 จงหาค่า x ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $(x^2 - 36)^4 = \cos(x \cdot \pi) - 1$

ตอบ .....

<u>แนวคิด</u>

Sup'k-Pb2.28.2 *(ดักแนวPAT1)* จงหาค่า x ให้ครบทุกตัว ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\sqrt{x-2} = 32 - x^5$

ตอบ.....

BRAN-Pb2.28 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $B = \left\{ x \in R \middle| \log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3\sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) - 1} = 1 \right\}$

แล้วผลบวกของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

BRAN-Pb2.28 **ตอบ 0003.00**

แนวคิด จากสมการ $\log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3\sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) - 1} = 1$

ขั้นที่ 1 *เงื่อนไข* $0 \le$ ใต้รู้ด

$\therefore\ 0 \le \cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) - 1 \rightarrow \therefore\ 1 \le \cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) \rightarrow$ (๑)

ขั้นที่ 2 *เงื่อนไขตรีโกณ* $-1 \le \cos\theta \le 1$ จะได้ $\therefore\ -1 \le \cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) \le 1 \rightarrow$ (๒)

ขั้นที่ 3 จาก (๑) และ (๒) ใช้Sup'k Tips

Sup'k Tips

จะได้ว่า $\cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) = 1$ เท่านั้น

แทนค่าในโจทย์ $\log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3 \cdot \sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) - 1} = 1$

$\therefore\ \log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3 \cdot \sqrt{1 - 1} = 1$

$\log_2(-x^2 + 7x - 10) = 1$

ปลด log ไปเสียบอีกฝั่ง $(-x^2 + 7x - 10) = 2^1$

$-x^2 + 7x - 10 = 2 \rightarrow \therefore\ x = 3, 4$

ขั้นที่ 4 ตรวจคำตอบ

<u>กรณีที่1</u> เมื่อ $x = 3$ แล้ว $\log_2(-3^2 + 7\cdot 3 - 10) + 3 \cdot \sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{3^2+7}\right) - 1} = 1$

$\log_2(2) + 3 \cdot \sqrt{1-1} = 1$

$1 + 3 \cdot \sqrt{0} = 1$ **จริง**

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $x \neq 4$ แล้ว ~~$\log_2(-4^2 + 7\cdot 4 - 10) + 3 \cdot \sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{4^2+7}\right) - 1} = 1$~~

$\log_2(2) + 3 \cdot \sqrt{\cos(\sqrt{23}\cdot\pi) - 1} = 1$ ***ไม่จริง***

ดังนั้น $x = 3$ เท่านั้น จึงได้ $B = \{3\} \rightarrow \therefore$ ผลบวกของสมาชิกใน B เท่ากับ 3 ***ตอบ***

ทบทวนสูตรตรรกศาสตร์

นิเสธ

P	~P
T	~T ≡ F
F	~F ≡ T

และ

P	Q	P ∧ Q
T	T	T ∧ T ≡ T
T	F	T ∧ F ≡ F
F	T	F ∧ T ≡ F
F	F	F ∧ F ≡ F

หรือ

P	Q	P ∨ Q
T	T	T ∨ T ≡ T
T	F	T ∨ F ≡ T
F	T	F ∨ T ≡ T
F	F	F ∨ F ≡ F

ถ้า...แล้ว...

P	Q	P → Q
T	T	T → T ≡ T
T	F	T → F ≡ F
F	T	F → T ≡ T
F	F	F → F ≡ T

...ก็ต่อเมื่อ...

P	Q	P ↔ Q
T	T	T ↔ T ≡ T
T	F	T ↔ F ≡ F
F	T	F ↔ T ≡ F
F	F	F ↔ F ≡ T

ประพจน์ที่***สมมูล***กัน คือ ประพจน์สองประพจน์ที่มีค่าความจริง***เหมือนกัน***ทุกกรณี กรณีต่อกรณี

สมมูลใช้สัญลักษณ์ คือ ≡

เช่น $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

พิสูจน์

p	q	r	(p ∧ q)	(p ∧ q) → r	(p → r)	(q → r)	(p → r) ∨ (q → r)
T	T	T	(T ∧ T) ≡ T	T → T ≡ T	T	T	T ∨ T ≡ T
T	T	F	(T ∧ T) ≡ T	T → F ≡ F	F	F	F ∨ F ≡ F
T	F	T	(T ∧ F) ≡ F	F → T ≡ T	T	T	T ∨ T ≡ T
T	F	F	(T ∧ F) ≡ F	F → F ≡ T	F	T	F ∨ T ≡ T
F	T	T	(F ∧ T) ≡ F	F → T ≡ T	T	T	T ∨ T ≡ T
F	T	F	(F ∧ T) ≡ F	F → F ≡ T	T	F	T ∨ F ≡ T
F	F	T	(F ∧ F) ≡ F	F → T ≡ T	T	T	T ∨ T ≡ T
F	F	F	(F ∧ F) ≡ F	F → F ≡ T	T	T	T ∨ T ≡ T

สูตร

กฎการสลับที่	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
กฎการเปลี่ยนกลุ่ม	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
กฎการคูณกระจาย	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
กฎเดอร์มอนแกน	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
กฎนิเสธ	$\sim(\sim p) \equiv p$	

โจทย์ตรรกศาสตร์ *แนวพื้นฐาน VS สมมูล VS สัจนิรันดร์*

BRAN-Pb1.1 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ A, B และ C เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
2) ประพจน์ $A \rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
3) ประพจน์ $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
4) ประพจน์ $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ สมมูลกับประพจน์ $(A \wedge B) \rightarrow C$

แนวคิด

ช้อย ข้อ 4) ประพจน์ $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv$ สมมูลกับประพจน์ $(A \wedge B) \rightarrow C$

วิธีเร็วๆ

วิธีจริง ผิด เพราะ

$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv$

$\equiv (\sim A \vee C) \wedge (\sim B \vee C)$

$\equiv (\sim A \wedge \sim B) \vee C$

$\equiv \sim(A \vee B) \vee C$

$\equiv (A \vee B) \rightarrow C$

$\equiv$ ~~$(A \wedge B) \rightarrow C$~~

สูตรนิยม *"หน้า ชี้ หลัง"*

Sup'k Tips

$(q \wedge r) \rightarrow p \equiv (q \rightarrow p) \vee (r \rightarrow p)$

$(q \vee r) \rightarrow p \equiv (q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p)$

$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

หลัก I ***ลำดับการทำ แบบ ตรง***
ขั้นที่ 1 ทำในวงเล็บก่อน
ขั้นที่ 2 ทำ นิเสธ
ขั้นที่ 3 ทำ $\wedge$, $\vee$
ขั้นที่ 4 ทำ $\rightarrow$
ขั้นที่ 5 ทำ $\leftrightarrow$

หลัก II ***ลำดับการทำ แบบ ย้อนกลับ***
ขั้นที่ 1 ทำ $\leftrightarrow$
ขั้นที่ 2 ทำ $\rightarrow$
ขั้นที่ 3 ทำ $\wedge$, $\vee$
ขั้นที่ 4 ทำ นิเสธ
ขั้นที่ 5 ทำในวงเล็บ

ช้อย ข้อ 1) ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

วิธีทำเร็วๆ

วิธีจริง

A	B	A ↔ B
T	**T**	T ↔ T ≡ **T**
T	F	T ↔ F ≡ F
F	T	F ↔ T ≡ F
F	**F**	F ↔ F ≡ **T**

A	B	C	$(B \wedge C) \rightarrow [\sim A \rightarrow C]$
T	**T**	T	$(\mathbf{T} \wedge T) \rightarrow [\sim \mathbf{T} \rightarrow T]$ $\equiv (T) \rightarrow [\ F \rightarrow T]$ $\equiv (T) \rightarrow [\ T\ ]$ $\equiv \mathbf{T}$
T	**T**	F	$(\mathbf{T} \wedge F) \rightarrow [\sim \mathbf{T} \rightarrow F]$ $\equiv (F) \rightarrow [\ F \rightarrow F]$ $\equiv (F) \rightarrow [\ T\ ]$ $\equiv \mathbf{T}$
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	**F**	T	$(\mathbf{F} \wedge T) \rightarrow [\sim \mathbf{F} \rightarrow T]$ $\equiv (F) \rightarrow [\ T \rightarrow T]$ $\equiv (F) \rightarrow [\ T\ ]$ $\equiv \mathbf{T}$
F	**F**	F	$(\mathbf{F} \wedge F) \rightarrow [\sim \mathbf{F} \rightarrow F]$ $\equiv (F) \rightarrow [\ T \rightarrow F]$ $\equiv (F) \rightarrow [\ F\ ]$ $\equiv \mathbf{T}$

ช้อย ข้อ 1) ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็น***เท็จ***

วิธีเหนือชั้น

สูตรนิยม *"หน้า ชี้ หลัง"*

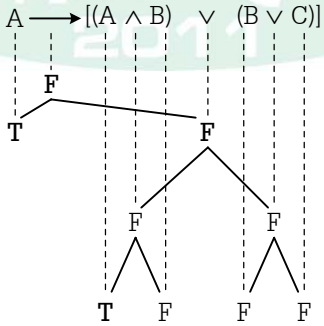
***Sup'ker*ลัด**

ช้อย ข้อ 2) ประพจน์ $A \rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$ เป็น***สัจนิรันดร์***

วิธีเหนือชั้น

วิธีทำเร็วๆ

วิธีจริง *หลักการตรวจสอบสัจนิรันดร์ : ใช้วิธีการจับเท็จ (แตกกิ่งย้อนกลับ)*



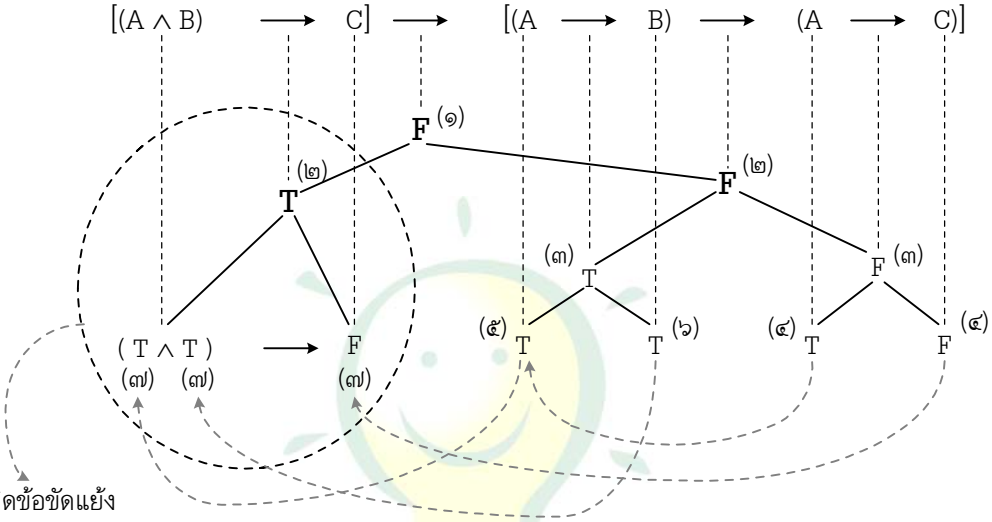
การจับเท็จ สำเร็จ เพราะไม่เกิดข้อขัดแย้งใดๆ

∴ ดังนั้น ประพจน์นี้ ***ไม่เป็น*** สัจนิรันดร์

ข้อย ข้อ 3) ประพจน์ $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีจริงแบบ I

หลักการตรวจสอบสัจนิรันดร์ : ใช้วิธีการจับเท็จ (แตกกิ่งย้อนกลับ)



เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะว่าจากขั้นที่ (๗)

$$(T \wedge T) \rightarrow F$$
$$\equiv (T) \rightarrow F$$
$$\equiv F$$

ซึ่งไม่ตรงกับการแตกกิ่งในขั้นที่ (๒)

การเกิด***ข้อขัดแย้ง*** หมายถึง การจับเท็จ ***ไม่สำเร็จ***

แสดงว่า ประพจน์ในข้อนี้ เป็น ***สัจนิรันดร์***

วิธีจริงแบบ II

ถูก สมมติว่า $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ฉะนั้น $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)] \equiv F$ ได้

ส่งผลให้ $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv T$ ...(1)

และ $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \equiv F$ ...(2)

โดย (2) จะได้ $A \rightarrow B \equiv T$ และ $A \rightarrow C \equiv F$

ฉะนั้น $A \equiv T$, $B \equiv T$, $C \equiv F$

ทำให้ $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv F$ ***ขัดแย้งกับ*** (1)

ดังนั้น $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ เป็น***สัจนิรันดร์***

โจทย์ตรรกศาสตร์เพิ่มเติม *แนวสมมูล VS สัจนิรันดร์*

SheLL1.1 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์

ถ้าประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

และประพจน์ $p \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็น**จริง** ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น**จริง**

1) $(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$
2) $q \rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$
3) $(p \rightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)$
4) $(r \leftrightarrow s) \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$

KMK-Pb 1.2 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $q \wedge r$ มีค่าความจริงเป็น**จริง** แล้ว p และ $p \vee [(q \wedge r) \rightarrow p]$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข. ถ้า p มีค่าความจริงเป็น**เท็จ** แล้ว r และ $(p \rightarrow q) \wedge r$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข้อใดต่อไปนี้เป็น**จริง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก
2) ก. ถูก และ ข. ผิด
3) ก. ผิด และ ข. ถูก
4) ก. ผิด และ ข. ผิด

FPAT-Pb17 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$

ข. ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ $(q \rightarrow p) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก
2) ก. ถูก และ ข. ผิด
3) ก. ผิด และ ข. ถูก
4) ก. ผิด และ ข. ผิด

FPAT-Pb18 *(B-PAT1'ต.ค.51)* กำหนดให้ P, Q, R, S เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(i) ประพจน์ $(\sim P \vee Q) \rightarrow (R \wedge \sim S)$ สมมูลกับ $(S \vee \sim R) \rightarrow (P \wedge \sim Q)$

(ii) ประพจน์ $(P \vee R) \wedge [(P \wedge R) \rightarrow (Q \vee R \vee \sim S)]$ เป็น**สัจนิรันดร์**

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ข้อ (i) ถูก และ ข้อ (ii) ถูก
2) ข้อ (i) ถูก และ ข้อ (ii) ผิด
3) ข้อ (i) ผิด และ ข้อ (ii) ถูก
4) ข้อ (i) ผิด และ ข้อ (ii) ผิด

KAiOU-Pb 1.1 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

1) $(p \rightarrow q) \vee p$
2) $(\sim p \wedge q) \rightarrow q$
3) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
4) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Sup'k Tips ถ้าให้ U= {10, 20, 30}

$\forall x$ จะ T ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ U= {10, 20, 30}

$\exists x$ จะ T ได้

วิจัย กำหนดให้ **U = {-5, -1, 10}**

P(x) แทน $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$, Q(x) แทน $\sqrt{x+1} > 2$, S(x) แทน $\sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$

แนวคิด

(i) จงหาค่าความจริงของ $\forall x[P(x)]$

(ii) จงหาค่าความจริงของ $\exists x[P(x)]$

(iii) จงหาค่าความจริงของ $\forall x[Q(x)]$

(iv) จงหาค่าความจริงของ $\exists x[Q(x)]$

(v) จงหาค่าความจริงของ $\forall x[S(x)]$

(vi) จงหาค่าความจริงของ $\exists x[S(x)]$

โจทย์ตรรกศาสตร์ *แนววลีบ่งปริมาณตัวแปรเดียว*

BRAN-Pb1.2 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

และ $P(x)$ แทน $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$

$Q(x)$ แทน $\sqrt{x+1} > 2$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์ $\exists x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

1) $\exists x[\sim P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$

2) $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$

3) $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$

4) $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

ทด *พิจารณาบางส่วนของ ช้อยข้อ 3)* $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

เพราะว่ามีกรณีหนึ่งซึ่ง

—— แทน $x = 8$; $P(8) \wedge Q(8) \equiv$ "$\sqrt{(8+1)^2} = 8 + 1$" $\wedge$ "$\sqrt{8+1} > 2$" $\equiv T \wedge T \equiv \mathbf{T}$

$\therefore \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็น **T**

$\therefore$ สรุป ช้อย ข้อ 3) $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$

$\equiv$ **T** $\rightarrow$ F $\equiv$ **F**

ทด *พิจารณาบางส่วนของ ช้อยข้อ 4)* $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ เป็น **T**

เพราะว่า มีกรณีหนึ่งซึ่ง

—— แทน $x = 9$; $P(9) \vee Q(9) \equiv$ "$\sqrt{(9+1)^2} \equiv 9 + 1$" $\vee$ "$\sqrt{9+1} > 2$" $\equiv T \vee T \equiv \mathbf{T}$

$\therefore \exists x[P(x) \vee Q(x)]$ เป็น **T**

$\therefore$ สรุป ช้อย ข้อ 4) $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

$\equiv$ **T** $\rightarrow$ F $\equiv$ **F**

Sup'k Tips ถ้าให้ U= {10, 20, 30}

$\forall x \forall y$ จะT ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ U= {10, 20, 30}

$\exists x \exists y$ จะ T ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ U = {10, 20, 30}

$\forall x \exists y$ จะ T ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ U = {10, 20, 30}

$\exists x \forall y$ จะ T ได้

SheLL1.2 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $\forall x \forall y[x + y + 2 > 0]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง**
2) $\exists x \exists y[x + y > 1]$ มีค่าความจริงเป็น***เท็จ***
3) $\exists x \forall y[x + y = 1]$ มีค่าความจริงเป็น***เท็จ***
4) $\forall x \exists y[x + y \geq 0]$ มีค่าความจริงเป็น***เท็จ***

โจทย์ตรรกศาสตร์เพิ่มเติม *แนววลีบ่งปริมาณสองตัวแปร*

KAiOU-Pb 1.2 *(PAT1'มี.ค.53)* ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ค่าความจริงของ $\forall x\exists y[x^2 + x = y^2 + y]$ เป็น**เท็จ**
2) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง ค่าความจริงของ $\exists x[3^x = \log_3 x]$ เป็น**จริง**
3) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง
   นิเสธของข้อความ $\forall x\exists y[(x > 0 \wedge y \leq 0) \wedge (xy < 0)]$
   คือ $\exists x\forall y[(xy < 0) \rightarrow (x \leq 0 \vee y > 0)]$
4) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม
   นิเสธของข้อความ $\forall x[(x > 0) \rightarrow (x^3 \geq x^2)]$ คือ $\exists x[(x \leq 0) \wedge (x^3 < x)]$

FPAT-Pb21 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{n \in I^+ \mid n \leq 10\}$
ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

1) $\exists x\forall y[\ xy \leq x + y\ ]$
2) $\forall x\forall y[\ (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)\ ]$
3) $\forall x\exists y[\ (x \neq 1) \rightarrow (x > y^2)\ ]$
4) $\exists x\exists y[\ (x - y)^2 \geq y^2 + 9xy\ ]$

KMK-Pb 1.1 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-2, -1, 1, 2\}$
ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น***เท็จ***

1) $\exists x\exists y[x \leq 0 \wedge |x| = y + 1]$
2) $\exists x\forall y[x \leq y \wedge -(x + y) \geq 0]$
3) $\forall x\exists y[x + y = 0 \vee x - y = 0]$
4) $\forall x\forall y[|x| < |y| \vee |x| > |y|]$

FPAT-Pb22 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ $U = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $\forall x\forall y[\ x \cap y \neq \varnothing\ ]$
2) $\forall x\forall y[\ x \cup y = U\ ]$
3) $\forall x\exists y[\ y \neq x \wedge y \subset x\ ]$
4) $\exists x\forall y[\ y \neq x \ \wedge\ y \subset x\ ]$

ทฤษฎี สมมติ *ถ้ามีเหตุ* : $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$

ผล : P

ข้อความดังกล่าวจะ **สมเหตุสมผล** ก็ต่อเมื่อ $[S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge ... \wedge S_n] \rightarrow P$ เป็น ***สัจนิรันดร์***

หลัก .....

โจทย์ตรรกศาสตร์ *แนวสมเหตุสมผล*

FPAT-Pb23 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ P, Q , R เป็นประพจน์ พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1. $P \rightarrow (\sim Q \vee R)$

2. $Q \vee R$

3. $\sim R$

ผล ***S***

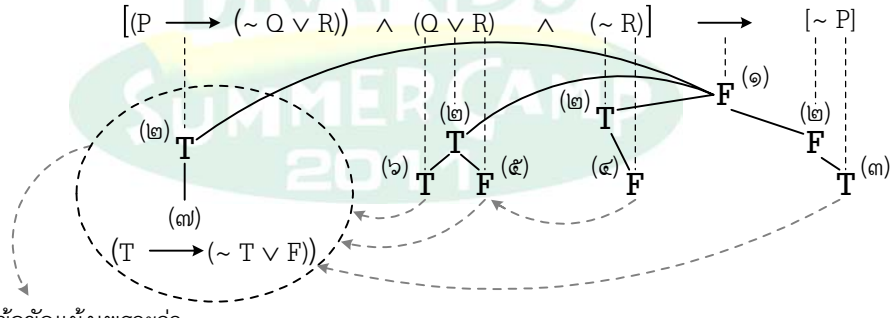
Sup'k ลัด

S เป็นประพจน์ในข้อใด จึงจะทำให้การอ้างเหตุผลข้างต้น สมเหตุสมผล

1) $\sim P$ 2) $\sim Q$ 3) $P \vee \sim Q$ 4) $P \vee R$

วิธีจริง

ข้อย ข้อ 1) ;



เกิดข้อขัดแย้งเพราะว่า

จากขั้นที่ (๗) $(T \rightarrow (\sim T \vee F))$

$\equiv (T \rightarrow (F \vee F)) \equiv (T \rightarrow (F)) \equiv \mathbf{F}$ ซึ่งไม่ตรงกับการแตกกิ่งในขั้นที่ (๒)

การเกิด***ข้อขัดแย้ง*** หมายถึง การจับเท็จ ***ไม่สำเร็จ*** แสดงว่า ประพจน์ในข้อนี้ เป็น ***<u>สัจนิรันดร์</u>***

∴ โจทย์ข้อนี้ เป็น ข้อความที่**สมเหตุสมผล** ด้วย$_{ตอบ}$

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนวทฤษฎีบทเศษเหลือ*

FPAT-Pb32 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ c เป็นค่าคงตัว และ $P(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{c}{2}x + 5$

ถ้า P(x) หารด้วย $x - 2$ เหลือเศษเท่ากับ 7 แล้ว $P\left(\frac{c}{3} + 2\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 31
2) 33
3) 35
4) 37

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนวแก้สมการพหุนาม*

FPAT-Pb34 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ $A = \{x \mid x \in I \text{ และ } x^3 - x = 0\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับ A

1) $\{x \mid x \in R \text{ และ } x^2 - x^4 = 0\}$
2) $\{x \mid x \in R \text{ และ } x^3 + x = -2x\}$
3) $\{x \mid x \in I \text{ และ } x^2 - 1 = 0\}$
4) $\{x \mid x \in I \text{ และ } x^2 + 1 = -2x\}$

FPAT-Pb35 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $S = \{x \mid |x|^3 = 1\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S

1) $\{x \mid x^3 = 1\}$
2) $\{x \mid x^2 = 1\}$
3) $\{x \mid x^3 = -1\}$
4) $\{x \mid x^4 = x\}$

FPAT-Pb36 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^4 - 5\sqrt{2}x^2 + 8 = 0$
ผลบวกของสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงบวกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sqrt{18}$
2) $\sqrt{24}$
3) $\sqrt[4]{242}$
4) $\sqrt[4]{162}$

FPAT-Pb37 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$
ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 2.1
2) 2.2
3) 3.3
4) 3.5

KMK-Pb 1.4 *(PAT1'ต.ค.52)* ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$
และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$
$A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1) $[-3\sqrt{5}, -0.9]$
2) $[-1.1, 0]$
3) $[0, 3\sqrt{5}]$
4) $[1, 5\sqrt{3}]$

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนวแก้อสมการ*

FPAT-Pb39 *(PAT1'ก.ค.52)* ถ้า $S = \{x \in R \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$ มี a เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดใน S และมี b เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุดใน S แล้ว $(b - a)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 24
2) 12
3) 6
4) 3

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนวแก้อสมการ ติดเศษส่วน ด้านใดด้านหนึ่ง เท่ากับ 0*

FPAT-Pb41 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ $X = \left\{x \mid \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x + 4)(2x - 1)} \leq 0\right\}$ และ $Y = \{x \mid x \in X \text{ และ } x < 0\}$

ถ้า p เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ X และ q เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ Y แล้ว $|pq|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 6
2) 8
3) 10
4) 12

FPAT-Pb43 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

ถ้า a เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต $A \cap (2, \infty)$ และ b เป็นจำนวนจริงลบที่มีค่ามากที่สุด โดยที่ $b \notin A$ แล้ว $a^2 - b^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) −5
2) −9
3) 5
4) 9

FPAT-Pb42 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้ X คือ เซตคำตอบของอสมการ $\frac{(2x + 1)(x - 1)}{2 - x} \geq 0$

Y คือ เซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 7x + 3 < 0$ ค่าของ $6a - b$ มีค่าเท่าใด เมื่อ $X \cap Y = [a, b)$

1) 4
2) 6
3) 8
4) 10

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนวแก้อสมการ ติดเศษส่วน ด้านใดด้านหนึ่ง ไม่เท่ากับ 0*

KMK-Pb 1.5 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ $S = \left\{x \mid \frac{x}{x^2 - 3x - 2} \geq \frac{x + 2}{x^2 - 1}\right\}$

ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ S

1) $(-\infty, -3)$
2) $(-1, 0.5)$
3) $(-0.5, 2)$
4) $(1, \infty)$

Sup'k หลัก

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนว แก้อสมการค่าสัมบูรณ์* แบบมี แอ็บข้างเดียว อีกข้างเป็นค่าคงที่

KAiOU-Pb 1.4 *(PAT1'มี.ค.53)* กำหนดให้ $A = \left\{x \in R \mid \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4\right\}$ เมื่อ R คือเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $A' = \{x \in R \mid |3 - x| > 4\}$
2) $A' \subset (-1, \infty)$
3) $A = \{x \in R \mid x \leq 7\}$
4) $A \subset \{x \in R \mid |2x - 3| < 7\}$

BRAN-Pb1.3 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ P(S) แทนเพาเวอร์เซตของเซต S

ให้ $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$ และ $B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับ 4
2) จำนวนสมาชิกของ $P(I - (A \cup B))$ เท่ากับ 2
3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
4) $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\{0\}\}$

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนว แก้อสมการค่าสัมบูรณ์* แบบมี แอ็บข้างเดียว อีกข้างเป็นตัวแปร

FPAT-Pb46 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $A = \{x \mid |x - 1| \leq 3 - x\}$ และ a เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ A ค่าของ a อยู่ในช่วงใด

1) (0 , 0.5]
2) (0.5 , 1]
3) (1 , 1.5]
4) (1.5 , 2]

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนว แก้อสมการค่าสัมบูรณ์* แบบมี แอ็บสองข้าง

FPAT-Pb45 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้าช่วง (a, b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ $2|x + 3| > 3|x - 2|$ แล้ว b - a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 11
2) 12
3) 13
4) 14

โจทย์ระบบจำนวนจริง *แนว แก้อสมการค่าสัมบูรณ์* แบบ ปลดแอ็บโดยนิยาม

SheLL1.4 *(PAT1'ก.ค.53)* ถ้า $A = \left\{x \in R \mid \frac{|1 - x| - 2}{x + |x| - 3} > 1\right\}$ แล้ว $A \cap [0, 1)$ เท่ากับข้อใด

1) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
2) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
3) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$
4) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

โจทย์เรขาคณิตวิเคราะห์ *แนวหาพื้นที่รูป n เหลี่ยม*

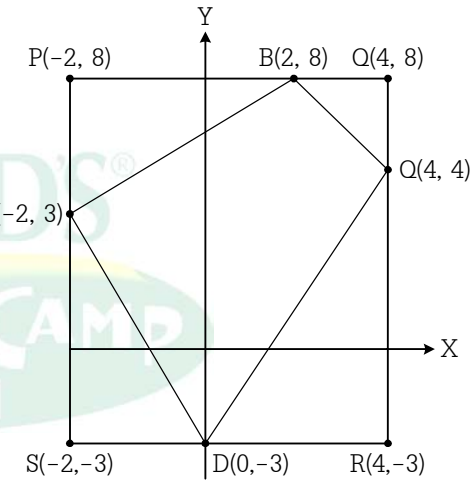
BRAN-Pb1.9 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด
โดยที่ A(−2, 3) , B(2, 8) , C(4, 4) และ D(0, −3) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 16 ตารางหน่วย
2) 32 ตารางหน่วย
3) $10\sqrt{13}$ ตารางหน่วย
4) $26\sqrt{10}$ ตารางหน่วย

วิธีคิดเร็วๆ

วิธีจริง BRAN-Pb1.9 ตอบ 2)

ขั้นที่ 1 จากรูป



พื้นที่ [PQRS] = $PQ \cdot QR = |-2-4| \cdot |-3-8| = 66$

พื้นที่ [ABP] = $\frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP = \frac{1}{2}|8-3| \cdot |-2-2|$
= 10 ตารางหน่วย

พื้นที่ [BCQ] = $\frac{1}{2} \cdot CQ \cdot BQ = \frac{1}{2}|8-4| \cdot |4-2|$
= 4 ตารางหน่วย

พื้นที่ [CDR] = $\frac{1}{2} \cdot CR \cdot DR = \frac{1}{2}|-3-4| \cdot |4-0|$
= 14 ตารางหน่วย

พื้นที่ [ADS] = $\frac{1}{2} \cdot AS \cdot DS = \frac{1}{2}|-3-3| \cdot |-2-0|$
= 6 ตารางหน่วย

ขั้นที่ 2 จะหา พื้นที่ [ABCD] = [PQRS] − [ABP] − [BCQ] − [CDR] − [ADS]

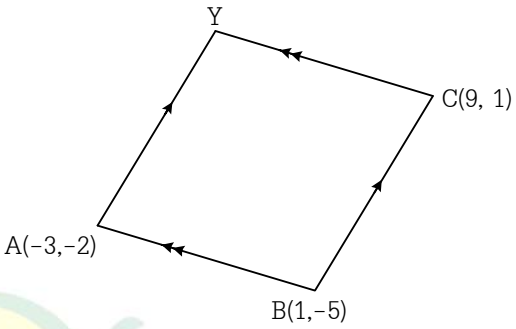
∴ พื้นที่ [ABCD] = 66 − 10 − 4 − 14 − 6 = 32 ตารางหน่วย

FPAT-Pb48 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่อยู่ในระนาบ XY
ถ้า A = (−3, −2) , B = (1, −5), C = (9, 1) แล้ว $|\overline{BD}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sqrt{91}$ 2) 10 3) $\sqrt{97}$ 4) $10\sqrt{2}$

วิธีคิดเร็วๆ

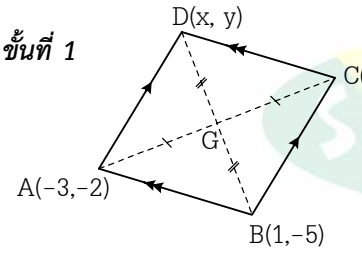
Sup'k Tips



วิธีจริง & พิสูจน์สูตรลัด

ทฤษฎีเรขาคณิต
เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จะตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ขั้นที่ 1



สมการ
จุดกึ่งกลางของ$_{\text{เส้นทแยงมุม}}$AC = จุด G = จุดกึ่งกลางของ$_{\text{เส้นทแยงมุม}}$BD

$$\left(\frac{[-3]+9}{2}, \frac{[-2]+1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+[-5]}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{[-3]+9}{2} = \frac{x+1}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{[-2]+1}{2} = \frac{y+[-5]}{2}$$

$$\therefore \quad 5 = x \quad \text{และ} \quad 4 = y$$

$$\therefore \quad D(x, y) = D(5, 4)$$

ขั้นที่ 2 จะหา $|\overline{BD}|$ = ระยะ BD = $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-[-5])^2} = \sqrt{97}$ ตอบ

โจทย์เพิ่มเติมเรขาคณิตวิเคราะห์

KAiOU-Pb 1.15 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี A(0, 0) และ B(2, 2) เป็นจุดยอด และ C(x, y) เป็นจุดยอดในจตุภาค(quadrant)ที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ยาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใด

1) $x - y + 4 = 0$
2) $4x + 3y - 1 = 0$
3) $2x - y - 3 = 0$
4) $x + y - 5 = 0$

KAiOU-Pb 1.9 *(PAT1'มี.ค.53)* จุด A(−3, 1), B(1, 5), C(8, 3) และ D(2, −3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) ด้าน AB ขนานกับด้าน DC
2) ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ $10\sqrt{2}$ หน่วย
3) ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D มีค่าเท่ากับ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ หน่วย
4) ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย

FPAT-Pb49 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ A(−1, −1) และ B(1, c) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า L เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A, B และมีความชันเท่ากับ 3 แล้วเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ −2 และ ผ่านจุด B จะมีสมการดังข้อใดต่อไปนี้

1) $y = -2x + 7$
2) $y = -2x + 5$
3) $y = -2x + 3$
4) $y = -2x + 1$

SheLL1.9 *(PAT1'ก.ค.53)* รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ (−4, 3) และ (−1, 2) ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C

1) $x + 8y - 27 = 0$
2) $8x + y - 27 = 0$
3) $4x - 5y + 3 = 0$
4) $-5x + 4y + 3 = 0$

โจทย์ภาคตัดกรวย *แนววงกลม*

BRAN-Pb1.8 *(PAT1'ต.ค.53)* พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$ เป็นสมการวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง ซึ่งมีสมการเป็น $21x + 20y + 168 = 0$

ข. $y^2 + 16x - 6y = 71$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-5, 3)$ และจุดโฟกัสที่ $(-1, 3)$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก
2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4) ก. ผิด และ ข. ผิด

KMK-Pb 1.9 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
และ $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0\}$
ถ้า $p \in A$ และ $q \in B$ แล้ว ระยะทางมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $5\sqrt{2}$ หน่วย
2) $2 + 5\sqrt{2}$ หน่วย
3) $2\sqrt{5}$ หน่วย
4) $5 + 2\sqrt{5}$ หน่วย

BRAN-Pb2.34 *(PAT1'ต.ค.53)* จุด $A(1 , 0)$ และจุด $B(b , 0)$ เมื่อ $b > 1$
เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง
ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด $(-1, 0)$ และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชัน เท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว b เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

FPAT-Pb50 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 1)$
ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $x = 1$
เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด

1) $(0, 1)$
2) $(0, 2)$
3) $(1, 0)$
4) $(3, 0)$

FPAT-Pb52 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้เส้นตรง l_1 และ l_2 สัมผัสกับวงกลม $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ ที่จุด A และ B ตามลำดับ โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B
ถ้าสมการของเส้นตรง l_1 คือ $x - 2y + 5 = 0$ แล้วจุดใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง l_2

1) $(0, 15)$
2) $(1, -8)$
3) $(8, -1)$
4) $(15, 0)$

KMK-Pb 2.7 *(PAT1'ต.ค.52)* ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง ถ้าวงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
มีศูนย์กลางที่ $(2, 1)$ และมีเส้นตรง $x - y + 2 = 0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม แล้ว $|a + b + c|$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

โจทย์ภาคตัดกรวย *แนวพาราโบลา*

FPAT-Pb54 *(PAT1'ก.ค.52)* ระยะทางระหว่างจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -8x$ กับ เส้นตรง $2x + y = 6$ มีค่าเท่าใด

1) $2\sqrt{5}$ หน่วย 2) $3\sqrt{5}$ หน่วย 3) $4\sqrt{5}$ หน่วย 4) $5\sqrt{5}$ หน่วย

FPAT-Pb55 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ P เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 2y = 0$ และเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $x^2 = 8y$ ระยะระหว่างจุด P และเส้นตรง $2x - y = 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{6}{\sqrt{5}}$ หน่วย 2) $\frac{7}{5}$ หน่วย 3) 7 หน่วย 4) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ หน่วย

FPAT-Pb56 *(PAT1'มี.ค.52)* ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา $y^2 - 4y + 4x = 0$ และเส้นไดเรกตริกซ์ที่จุด (a , b) แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

KMK-Pb 2.8 *(PAT1'ต.ค.52)* พาราโบลามีจุดยอดที่ $(-1, 0)$ และมีจุดกำเนิดเป็นจุดโฟกัส ถ้าเส้นตรง $y = x$ ตัดพาราโบลาที่จุด P และจุด Q แล้ว ระยะทางระหว่างจุด P กับจุด Q เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ภาคตัดกรวย *แนววงรี*

KMK-Pb 1.6 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ $S = [-2, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in S \times S \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสับเซตของ $D_r - R_r$

1) $(-1.4, -1.3)$ 2) $(-1.3, -1.2)$ 3) $(1.2, 1.4)$ 4) $(1.4, 1.5)$

FPAT-Pb57 *(B-PAT1'ต.ค.51)* วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, 2)$ แกนเอกขนานกับแกน X และยาว 6 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1) $(0, 1)$ 2) $(2, 0)$ 3) $(1, 4)$ 4) $(4, 1)$

FPAT-Pb58 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้ E เป็นวงรีที่มีจุดโฟกัสทั้งสองอยู่บนวงกลม C ที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าวงรี E สัมผัสกับวงกลม C ที่จุด $(1, 0)$ แล้วจุดใดต่อไปนี้อยู่บนวงรี E

1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 4) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

FPAT-Pb59 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 3, 0)$ และผ่านจุด $\left(2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงรีที่กำหนด

1) $(-4, 0)$ 2) $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 3) $(6, 0)$ 4) $(0, -3\sqrt{2})$

โจทย์ภาคตัดกรวย แนวไฮเพอร์โบลา

KMK-Pb 1.10 *(PAT1'ต.ค.52)* ให้ E เป็นวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 1$ ถ้า E ผ่านจุด (0, 1) แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E

1) $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2) $(1, \sqrt{2})$
3) $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
4) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

FPAT-Pb62 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ F_1, F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $2(x-1)^2 - (y-2)^2 = 8$ โดยที่ F_2 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 วงกลมที่มี F_2 เป็นจุดศูนย์กลางและผ่านจุด $(2\sqrt{3}, 3)$ คือ วงกลมที่มีสมการดังข้อใดต่อไปนี้

1) $(x + (1 + 2\sqrt{3})^2) = 4y - y^2 + 2$
2) $(x - (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 + 2$
3) $(x + (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 - 2$
4) $(x - (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 - 2$

FPAT-Pb63 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนด $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 17\}$

$P = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$

$Q = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 = 1\}$

ถ้า $a \in S \cap P$ และ $b \in S \cap Q$ แล้วระยะทางที่น้อยที่สุดระหว่าง a และ b เท่ากับเท่าใด

1) $3\sqrt{2} - 4$
2) $2\sqrt{3} - 2$
3) $3\sqrt{2} - 2$
4) $2\sqrt{3} - 4$

FPAT-Pb64 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $A = \{ a \mid$ เส้นตรง $y = ax$ ไม่ตัดกราฟ $y^2 = 1 + x^2\}$ และ $B = \{b \mid$ เส้นตรง $y = x + b$ ตัดกราฟ $y^2 = 1 - x^2$ สองจุด$\}$ เซต $\{d \mid d = c^2, c \in B - A\}$ เท่ากับช่วงใดต่อไปนี้

1) (0, 1)
2) (0, 2)
3) (1, 2)
4) (0, 4)

KAiOU-Pb 1.8 *(PAT1'มี.ค.53)* กำหนดให้วงรี $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$ แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด $(-3, 1 + \sqrt{8})$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) $5y^2 - 4x^2 - 10\sqrt{8}\,y - 32x - 25 = 0$
2) $3y^2 - 2x^2 - 6\sqrt{8}\,y - 8x + 15 = 0$
3) $y^2 - 4x^2 - 2y - 16x - 19 = 0$
4) $y^2 - 7x^2 - 2y - 28x - 28 = 0$

SheLL1.8 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดวงกลมรูปหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนจุดศูนย์กลางและจุดโฟกัสด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$ แล้ววงกลมดังกล่าวนี้มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{25\pi}{4}$ ตารางหน่วย
2) $\frac{25\pi}{2}$ ตารางหน่วย
3) 4π ตารางหน่วย
4) 5π ตารางหน่วย

โจทย์ความสัมพันธ์ *แนวอินเวอร์สของความสัมพันธ์*

FPAT-Pb77 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ $r = \{(x, y) \mid 2y = 3x - 4\}$
ถ้า a, b เป็นค่าคงตัว และ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$ แล้ว $3a - \frac{b}{4}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{4}{5}$ 4) $\frac{4}{3}$

FPAT-Pb78 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \text{ และ } y = x^2\}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm\sqrt{|x|}\}$

ข. กราฟของ r ตัดกับกราฟของ r^{-1} เพียง 2 จุด เท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

โจทย์ความสัมพันธ์ *แนวหาโดเมนและเรนจ์ โดยกราฟ*

FPAT-Pb75 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ เมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$ และ $g(x) = 2^x$ เมื่อ $x \in (-\infty, 0]$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $R_g \subset D_f$ 2) $R_f \subset D_g$
3) f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 4) g ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

FPAT-Pb70 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = -1\}$
ถ้า $a, b > 0$ และ $a \in D_r$, $b \in R_r$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 2.5 2) 3 3) 3.5 4) 4

โจทย์ความสัมพันธ์ *แนวหาโดเมนและเรนจ์ โดยการจัดรูป หาเงื่อนไข*

FPAT-Pb71 *(สอบตรงวิศวะ'50)* กำหนด r และ s เป็นความสัมพันธ์

$$r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + xy = -1\} \qquad s = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2}{1 - |3 - x|}\right\}$$

จงหาว่า $R_s - R_r$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1) $(-4, -2)$ 2) $(-1, 1)$ 3) $(-2, 0)$ 4) $(-1, 4)$

FPAT-Pb72 *(สอบตรงวิศวะ'51)* กำหนดให้ $r = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{5 - \sqrt{9 - x^2}}\right\}$

$$s = \{(x, y) \in R \times R \mid 2xy^2 - 3xy = 4x + 1\}$$

มีจำนวนเต็มกี่จำนวนที่อยู่ในเซต $R_r - D_s$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 7

KAiOU-Pb 1.6 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ และ $g(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{x-1}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_g = (2, \infty)$

ข. ค่าของ $x > 0$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$ มีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวคำนวณฟังก์ชันธรรมดา*

FPAT-Pb65 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้ $g(x) = x^2 + x + 1$ และ r, s เป็นค่าคงตัว ซึ่ง $s \neq 0$

ถ้า $g(r + s) = g(r - s)$ แล้ว r^2 เป็นสมาชิกของช่วงใดต่อไปนี้

1) (0, 0.5) 2) (0.5, 1) 3) (1, 1.5) 4) (1.5, 2)

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวจัดรูปฟังก์ชันธรรมดา*

KAiOU-Pb 1.13 *(PAT1'มี.ค.53)* กำหนดให้ $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $x \neq 1$

ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $f(\sec^2\theta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sin^2\theta$ 2) $\cos^2\theta$ 3) $\tan^2\theta$ 4) $\cot^2\theta$

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวจัดรูปฟังก์ชันอินเวอร์สธรรมดา*

AVATAR-Pb 6.1 *(แนวสอบตรงแพทย์ กสพท'53)* จงหา $f^{-1}(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

ตอบ.....

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวคำนวณฟังก์ชันคอมโพสิตธรรมดา*

KMK-Pb 2.3 *(PAT1'ต.ค.52)* ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = 2f(x)$ แล้ว จงหา $g \circ f(3) + f \circ g^{-1}(3)$

ตอบ.....

FPAT-Pb66 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ และ $g(x) = x^3$, $(f^{-1} \circ g)(3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) 16 2) 20 3) 50 4) 52

FPAT-Pb66.1 ให้ $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$ ถ้า $g(a) = 2$ แล้ว a อยู่ในช่วงใด

1) [−1, 1) 2) [1, 3) 3) [3, 5) 4) [5, 7)

FPAT-Pb67 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x - 5$ และ $g(x) = x^2$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $f \circ g(a) = g \circ f(a)$ แล้ว $(f \cdot g)(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 18 2) −18 3) 25 4) −25

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวคำนวณฟังก์ชันคอมโพสิตยากขึ้นมาหน่อย*

KAiOU-Pb 2.22 *(PAT1'มี.ค.53)*

> **นิยาม** $f : R \to R$ และ $g : R \to R$ เป็นฟังก์ชันใดๆ
> $(f \otimes g)(x) = f(g(x)) - g(f(x))$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $(f \otimes g)(1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

KAiOU-Pb 1.5 *(PAT1'มี.ค.53)* กำหนดให้ $y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 1

$y_2 = f(y_1)$, $y_3 = f(y_2)$, ...

$y_n = f(y_{n-1})$ สำหรับ n = 2, 3, 4, ...

ค่าของ $y_{2553} + y_{2010}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{x-1}{x+1}$
2) $\frac{x^2+1}{x-1}$
3) $\frac{x^2+1}{2x}$
4) $\frac{1+2x-x^2}{x-1}$

SheLL2.28 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า f_1, f_2, f_3, f_4, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R โดยที่ $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x^2 + 4$, $f_4(x) = x^2 - 4$

$(f_1 \circ g)(x) + (f_2 \circ h)(x) = 2$

และ $(f_3 \circ g)(x) - (f_4 \circ h)(x) = 4x$ ค่าของ $(g \circ h)(1)$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

SheLL1.18 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด และ $f(f(f(x))) = 16x + 45$ แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -11
2) -5
3) 11
4) 5

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวนิยามตรวจสอบความเป็นฟังก์ชัน*

BRAN-Pb1.4 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง, ความสัมพันธ์ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1) ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \sqrt{4 - y^2} \text{ และ } xy \geq 0\}$
2) ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy > 0\}$
3) ความสัมพันธ์ $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid ||x| - |y|| = 1\}$
4) ความสัมพันธ์ $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวฟังก์ชันแยกช่วง*

FPAT-Pb76 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ $f(x) = x^2 + 2$ เมื่อ $x \in [-1, 0] \cup (1, 2)$

และ $g(x) = \begin{cases} -x & , x \in [-1, 0] \\ 4x - 2 & , x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

1) $D_f \subseteq D_g$
2) $R_f \subseteq R_g$
3) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4) g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวฟังก์ชันแยกช่วง VS อินเวอร์ส*

FPAT-Pb79 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$

ค่าของ $f^{-1}(g(2) + g(-8))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$
2) $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$
3) $\frac{1 - \sqrt{2}}{-3}$
4) $\frac{1 + \sqrt{2}}{-3}$

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวฟังก์ชันพีชคณิตฟังก์ชัน VS อินเวอร์ส*

KMK-Pb 2.4 *(PAT1'ต.ค.52)* ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1 + x}$ แล้ว $(f^{-1} + g^{-1})(2)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ฟังก์ชัน *แนวคอมโพสิต VS อินเวอร์ส VS นิยามฟังก์ชันแบบเซต*

BRAN-Pb2.42 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 5\}$

$g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$

ถ้า $a \in R$ และ $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$ แล้ว $(f \circ g)(2a)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

เมตริกซ์ : *อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ (ตัวผกผันของเมทริกซ์)*

นิยาม 1.1!! $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

เมตริกซ์ $B_{n\times n}$ เป็น อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ $A_{n\times n}$

ก็ต่อเมื่อ $AB = I = BA$ เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

สูตร 1.2 !! ***ตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ A, อินเวอร์สของเมทริกซ์ A, A^{-1} สำหรับมิติ $n \times n$***

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

สูตร 1.3 !! ถ้า $A = [ก] \rightarrow \therefore \quad A^{-1} = \left[\frac{1}{ก}\right]$ เมื่อ $ก \neq 0$

สูตร 1.4 !! ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

นิยาม 1.6!! ***สำหรับเมทริกซ์ $A_{n\times n}$ ขนาดมิติใดๆ***

ถ้า $\det A = 0$ แล้ว จะเรียก เมทริกซ์ A ว่า "***<u>เมทริกซ์เอกฐาน</u>***", "Singular Matrix", "ซิงกูลาร์เมทริกซ์"

จะหา A^{-1} ไม่ได้

นิยาม 1.7!! ***สำหรับเมทริกซ์ $A_{n\times n}$ ขนาดมิติใดๆ***

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว จะเรียก เมทริกซ์ A ว่า "***<u>ไม่ใช่เมทริกซ์เอกฐาน</u>***" , "Non-singular Matrix"

"นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์"

จะหา A^{-1} ได้

Pb 3 ให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $(A - 2B)^{-1}$ ***ตอบ*** .....

Sup'kระวัง!!

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จาก $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow A = \frac{1}{(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 จาก $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow B = \frac{1}{2\cdot 0 - 1\cdot(-1)}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \ B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 จะหา $(A - 2B)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}\begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{9}{57}\begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

โจทย์เมตริกซ์ *แนวหา อินเวอร์ส ของ 2 × 2*

TF-PAT4 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

และ $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาว่า $(AB)^{-1}$ คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

โจทย์เมตริกซ์ *แนวแก้สมการเมตริกซ์*

SheLL2.30 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

ถ้า $3\begin{bmatrix} 5^a & b \\ 2^c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a & 6 \\ d-1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5^a + b \\ 2^c & 2d \end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ b + c เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

KAiOU-Pb 2.7 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ x, y, z และ w สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ z & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}$$

ค่าของ $4w - 3z + 2y - x$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

BRAN-Pb 1.12 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ xyz เท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1) −3 2) −1 3) 0 4) 1

KMK-Pb 1.11 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับสมการ $AX = C$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $(2A + B)X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่าใดต่อไปนี้

1) 3 2) 6 3) 9 4) 12

ทฤษฎีของ det ดีเทอร์มินันต์

สูตร 3.1 !! ***ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ของเมตริกซ์ขนาด 2 × 2***

$A = [5] \rightarrow \therefore \det A = |[5]| = 5$

$B = [-7] \rightarrow \therefore \det B = |[-7]| = -7$

Sup'k ระวัง!!

สูตร 3.2 !! ***ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ของเมตริกซ์ขนาด 2 × 2***

$C = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \det C = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9 \times 2 - 4 \times 5 = 18 - 20 = -2$

$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \det D = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2) \times 7 - (-4) \times 5 = -14 + 20 = 6$

สูตร 3.3 !! กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$\therefore \det A = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$

ระวัง! สูตรคูณลงตอบเลย คูณขึ้นใส่ลบซ้อน ***ใช้ได้เฉพาะ 2 × 2, 3 × 3***

โจทย์เมตริกซ์ *แนวนิยาม det*

TF-PAT1 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & b & 2 \end{bmatrix}$ และ $Y = \begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

โดยที่ X และ Y ไม่มีตัวผกผัน แล้ว a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) −1 2) −2 3) −3 4) −4

สูตรของ ไมเนอร์, โคแฟกเตอร์

นิยาม 4.1 กำหนดให้เมตริกซ์ $A = [\ a_{ij}\ ]_{n\times n}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2

ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และ หลักที่ j ออกไป

เขียนแทน ไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย ***$M(a_{ij})$, $M_{ij}(A)$***

นิยาม 4.2 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2

โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} คือ $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}(A)$

เขียนแทน โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ด้วย $C(a_{ij})$, $C_{ij}(A)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore\ M_{13}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$\rightarrow \therefore\ C_{13}(A) = (-1)^{1+3}\cdot M_{13}(A) = (-1)^4\cdot M_{13}(A) = (-1)^4\cdot(-5) = -5$

โจทย์เมตริกซ์ *แนวโคแฟกเตอร์ ไมเนอร์*

TF-PAT2 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า $C_{11}(A) = 13$ และ $C_{21}(A) = 9$ แล้ว det(A) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) −33 2) −30 3) 30 4) 33

สูตรของdet ดีเทอร์มินันต์

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(cA) = c^n \cdot (\det A)$
- $\det I = 1$, $\det \underline{0} = 0$

- $\det(A^t) = \det A$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $\det(A^n) = (\det A)^n$

- $\det(-A) = \det A$, n = คู่
- $\det(-A) = -\det A$, n = คี่
- $\det(A \pm B) \neq \det A \pm \det B$

โจทย์เมตริกซ์ แนวใช้สูตรของเมตริกซ์ VS สูตรของdet

KAiOU-Pb2.6 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×2

โดยที่ $2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(A^4B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

KMK-Pb 1.12 *(PAT1'ต.ค.52)* ถ้า $\det\left(2\begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

โจทย์เมตริกซ์ แนวdet (adj A)

AVATAR-Pb 14.1 *(แนวข้อสอบตรงเข้าแพทย์ กสพท'53)* กำหนด A เป็นเมตริกซ์ 3×3 ที่มี $\det(A) = 2$

จงหา $\det(\text{adj}(\text{adj}(A)))$

ตอบ.....

Sup'k Tips

โจทย์เมตริกซ์ แนวใช้สูตรของเมตริกซ์บวกกัน

TF-PAT3 *(PAT1'ก.ค.52)* ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดยที่ $\det(A) = 4$ และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ถ้า $A - 3I$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det(A + 3I)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 12 2) 16 3) 20 4) 26

BRAN-Pb2.36 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ X เป็นเมตริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

แล้วค่าของ $\det(2X^t\cdot(X + X^t))$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

SheLL1.12 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

ค่าของ $\det(2A^t + BC^2 + B^tC)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1 2) 0 3) 2 4) 6

SheLL2.31 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ a, b, c, d, t เป็นจำนวนจริง ถ้า $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ โดยที่ $\det(A) = t \neq 0$

และ $\det(A + t^2A^{-1}) = 0$ แล้วค่าของ $\det(A - t^2A^{-1})$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

เมตริกซ์ผูกผันของ A หรือ adj(A)

นิยาม 2.1 เมตริกซ์ผูกพันของ A คือ adj A
กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ จะได้ adj $A = [C_{ij}]^t$

นิยาม2.2 $\text{adj } A = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}^t$

สูตร 2.3 $A\cdot \text{adj } A = \text{adj } A\cdot A = (\det A)I$

A-Pb 3.32 ให้ $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -3 & 8 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} ***ตอบ*** .....

แนวคิด **ขั้นที่ 1** หา $\det A = -70 \neq 0$ ซึ่งสามารถหาอินเวอร์สได้

ขั้นที่ 2 ใช้สูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{-70}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}8 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 8\end{vmatrix}\end{bmatrix}^t = \frac{1}{-70}\begin{bmatrix}-8 & -3 & -14\\ 10 & -5 & 0\\ -32 & -12 & 14\end{bmatrix}^t = \frac{1}{-70}\begin{bmatrix}-8 & 10 & -32\\ -3 & -5 & -12\\ -14 & 0 & 14\end{bmatrix}$$

โจทย์เมตริกซ์ แนวหา อินเวอร์ส ของ 3X3

TF-PAT6 *(B-PAT1'ต.ค.51)* กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ เป็นเมทริกซ์ ที่มี $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว จงหาค่าของ a_{23}

1) 0 2) $\frac{16}{70}$ 3) $\frac{32}{70}$ 4) $\frac{12}{70}$

Sup'k Tips

TF-PAT7 *(PAT1'มี.ค.52)* ให้ $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาสมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ A^{-1}

1) $-\frac{2}{3}$ 2) -2 3) $\frac{2}{3}$ 4) 2

KMK-Pb 2.11 *(PAT1'ต.ค.52)* ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ A^{-1} เท่ากับเท่าใด **ตอบ**.....

โจทย์เมตริกซ์ แนวแก้สมการหลายตัวแปร

TF-PAT8 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้

$a - b + 2c = 9$

$2a + b - c = 0$

$3a - 2b + c = 11$

แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) -4 2) -2 3) 2 4) 4

TF-PAT9 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$2x - 2y - z = -5$, $x - 3y + z = -6$, $-x + y - z = 4$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 2) $x + y + z = 2$ 3) $xyz = 6$ 4) $\frac{xy}{z} = -2$

TF-PAT10 *(PAT1'ก.ค.52)* กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$2a - 2b - c = 1$, $a - 3b + c = 7$, $-a + b - c = -5$

แล้ว ค่าของ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0 2) 3 3) 6 4) 9

ตรีโกณประยุกต์ อย่างยาก

สูตร 8.1! **สูตรผลบวกหรือผลต่างของมุม**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$
$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$
$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$
$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \quad , \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

พิสูจน์ $\tan(A + B) = \dfrac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \dfrac{\frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$

$$= \frac{\frac{\sin A \cancel{\cos B}}{\cos A \cancel{\cos B}} + \frac{\cancel{\cos A} \sin B}{\cancel{\cos A} \cos B}}{\frac{\cancel{\cos A} \cos B}{\cancel{\cos A} \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\cot(A + B) = \frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot B + \cot A} \quad , \quad \cot(A - B) = \frac{\cot A \cdot \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

FPAT-Pb81 *(PAT1'ก.ค.52)* จงหาว่า $\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$ มีค่าเท่าใด

1) -4 2) -2

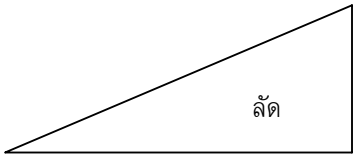
3) 2 4) 4

แนวคิด

SheLL1.13 *(PAT1'ก.ค.53)* ถ้า $\sin 15^\circ$ และ $\cos 15^\circ$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + ax + b = 0$ แล้วค่าของ $a^4 - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1 2) 1

3) 2 4) $1 + 3\sqrt{2}$



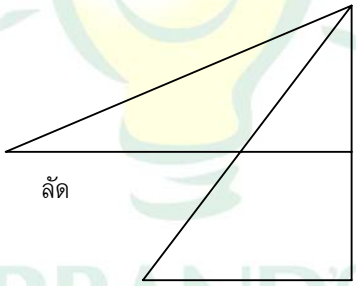
KMK-Pb 2.5 *(PAT1'ต.ค.52)* ถ้า $1 - \cot 20^\circ = \dfrac{x}{1 - \cot 25^\circ}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

****KAiOU-Pb 2.5*** *(PAT1'มี.ค.53)* ค่าของ $\dfrac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

วิธีเร็วกว่า



วิธีจริง $\dfrac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ = เปลี่ยนผลต่างไปเป็นผลคูณ = $\dfrac{2 \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ \cdot \dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} + \cos 36^\circ}$

$= \dfrac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\sin 36^\circ \sin 18^\circ + \cos 36^\circ \cos 18^\circ} = \dfrac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos(36^\circ - 18^\circ)}$

$= \dfrac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

$= \dfrac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \dfrac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \dfrac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ}$

$= \dfrac{\sin 144^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \dfrac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{2 \cdot \sin 36^\circ} = \dfrac{\sin(\pi - 36^\circ)}{2 \cdot \sin 36^\circ}$ = ยุบมุม = $\dfrac{\sin(36^\circ)}{2 \cdot \sin 36^\circ} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

สูตรมุม 2A

$$\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A = \frac{2\cdot\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cdot\cos^2 A - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\cdot\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cdot\cot A}$$

พิสูจน์

จาก สูตร $\sin(A+B) = \sin A\cdot\cos B + \cos A\cdot\sin B$

แทนค่า มุม B = มุม A

จะได้เป็น $\sin(A+A) = \sin A\cdot\cos A + \cos A\cdot\sin A$

$\therefore \sin(2A) = 2\cdot\sin A\cdot\cos A$ จบ

Sup'k ลัลล้า

sin มุม 2A อืม เสียงที่บอกฉัน .....

ความรักของเธอ อืม เสียงที่บอกฉัน ว่าเธอห่วงใย

อีกสูตรนั้นคือ (2 · tanA) ส่วน .....

มือนั้นของเธอ ที่แตะหน้าผากฉัน วันที่ฉันกำลังตาย

แนวบทกลับของมุม 2A

$$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

พิสูจน์

จาก $\cos 2A = 1 - 2\cdot\sin^2 A$

$\therefore 2\cdot\sin^2 A = 1 - \cos 2A$

$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$

$$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

พิสูจน์

จาก $\cos 2A = 2\cdot\cos^2 A - 1$

$\therefore \cos 2A + 1 = 2\cdot\cos^2 A$

$\frac{1+\cos 2A}{2} = \cos^2 A$

$$\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

พิสูจน์

สูตรมุม 3A และ บทกลับ

$$\sin 3A = 3\cdot\sin A - 4\cdot\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cdot\cos^3 A - 3\cdot\cos A$$

$$\tan 3B = \frac{3\cdot\tan B - \tan^3 B}{1-3\cdot\tan^2 B}$$

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cdot\cot A}{3\cdot\cot^2 A - 1}$$

$$\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$$

$$\cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ *แนวสูตรมุม สองเท่า*

***BRAN-Pb2.32** *(PAT1'ต.ค.53)*

ให้ $(\sin 1°)(\sin 3°)(\sin 5°) \ldots (\sin 89°) = \frac{1}{2^n}$

ค่าของ 4n เท่ากับเท่าใด **ตอบ**.....

แนวคิด

Sup'k Tips

***FPAT-Pb83** *(B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้า $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{1+A\cos\theta\sin\theta}{\cos 2\theta}$ แล้ว A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 2) 2 3) 4 4) 6

***SheLL2.29** *(PAT1'ก.ค.53)* ค่าของ $\frac{\sum_{n=1}^{44}\cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^\circ} - \frac{\sum_{n=1}^{44}\sin n^\circ}{\sum_{n=1}^{44}\cos n^\circ}$ เท่ากับเท่าใด **ตอบ**.....

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนว $(\sin\theta + \cos\theta)$ VS $(\sin\theta \cdot \cos\theta)$

BRAN-Pb2.33 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$5(\sin a + \cos a) + 2\sin a\cdot\cos a = 0.04$

จงหาค่าของ $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75\sin a\cdot\cos a$ ***ตอบ***.....

Sup'k ลัด

วิธีจริง

ให้ $x = \sin a + \cos a$ และ $y = \sin a \cos a$

จากโจทย์จะได้ $5x + 2y = 0.04$ .....(1)

เนื่องจาก $x^2 = (\sin^2 a + \cos^2 a) + 2\sin a\cos a = 1 + 2y = 1 + \sin 2a$

ฉะนั้น $x^2 = 1 + 2y$ .....(2)

พิจารณา $x^2 = 1 + \sin 2a$ จะได้ $0 \le x^2 \le 2$ ฉะนั้น $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

(1) + (2) , $x^2 + 5x = 1.04$

$x^2 + 5x - 1.04 = 0$

$(x + 5.2)(x - 0.2) = 0$

$x = 0.2, -5.2$

แต่ $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ จึงได้ $x = 0.2$ เท่านั้น

ส่งผลให้ $y = \frac{1}{2}((0.2) - 1) = -0.48$

เพราะว่า $\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a\cos a + \cos^2 a)$

$= x(1 - y)$

$\therefore\ 125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75\sin a\cos a = 125x(1 - y) + 75y$

$= 125(0.2)(1 - (-0.48)) + 75(-0.48)$

$= 125(0.2)(1 - (-0.48)) + 75(-0.48)$

$= 37 - 36$

$125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75\sin a\cos a = 1_{\text{ตอบ}}$

KAiOU-Pb 1.7 *(PAT1'มี.ค.53)* กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\sin x + \cos x = a$ และ $\sin x - \cos x = b$ แล้วค่าของ $\sin 4x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

Sup'k Tips

1) $\frac{1}{2}(a^3b - ab^3)$ 2) $\frac{1}{2}(ab^3 - a^3b)$

3) $ab^3 - a^3b$ 4) $a^3b - ab^3$

KMK-Pb 2.6 *(PAT1'ต.ค.52)*

ถ้า $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{3}{2}$ เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\arccos(\tan 3\theta)$ มีค่าเท่าใด

ตอบ .....

FPAT-Pb82 *(PAT1'มี.ค.52)* ถ้า $\cos\theta - \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้วค่าของ $\sin 2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{4}{13}$ 2) $\frac{9}{13}$ 3) $\frac{4}{9}$ 4) $\frac{13}{9}$

สูตร 22.1! *สูตร ผลบวก ผลต่าง → ผลคูณ*

$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ = 2·sin(half sum)·cos(half diff)

$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ = 2·cos(half sum)·sin(half diff)

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ = 2·cos(half sum)·cos(half diff)

$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ = −2·sin (half sum)·sin(half diff)

สูตร 23.1! *สูตร ผลคูณ → ผลบวก ผลต่าง*

$2\cdot\sin A\cdot\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ = sin(sum) + sin(diff)

$2\cdot\cos A\cdot\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ = sin(sum) − sin(diff)

$2\cdot\cos A\cdot\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ = cos(sum) + cos(diff)

$-2\cdot\sin A\cdot\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$ = cos(sum) − cos(diff)

สูตร 35.2! ***ระวังเงื่อนไขของ x ด้วย***

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\arctan(-x) = -\arctan x$

$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

$\operatorname{arccosec}(-x) = -\operatorname{arccosec} x$

$\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$

สูตร 35.2! ***ระวังเงื่อนไขของ x ด้วย***

$\arcsin\frac{1}{x} = \operatorname{arccosec} x$

$\arccos\frac{1}{x} = \operatorname{arcsec} x$

$\arctan\frac{1}{x} = \operatorname{arccot} x$

$\operatorname{arccot}\frac{1}{x} = \arctan x$

$\operatorname{arccosec}\frac{1}{x} = \arcsin x$

$\operatorname{arcsec}\frac{1}{x} = \arccos x$

สูตร 2.1 !!

$\arcsin(\sin x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x) = x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

$\arctan(\tan x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ เมื่อ $0 < x < \pi$

$\operatorname{arccosec}(\operatorname{cosec} x) = x$ เมื่อ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\operatorname{arcsec}(\sec x) = x$ เมื่อ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

สูตร 3.1 !! $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$
สูตร 3.2 !! $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} + \pi$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y$
สูตร 3.3 !! $\arctan x + \arctan y = \frac{x+y}{1-xy} - \pi$ เมื่อ $\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ *แนวอินเวอร์สตรีโกณ*

BRAN-Pb2.31 *(PAT1'ต.ค.53)* จงหา $\dfrac{\tan\left(\operatorname{arccot}\frac{1}{5} - \operatorname{arccot}\frac{1}{3} + \arctan\frac{7}{9}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)}$ ***ตอบ***.....

Sup'k Tips I

Sup'k Tips II

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ *แนวสมการอินเวอร์สตรีโกณ*

FPAT-Pb87 *(B-PAT1'ต.ค.51)* จำนวนคำตอบที่แตกต่างกันของสมการ $\arcsin x = 2\cdot\arccos x$ มีกี่ค่า

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

FPAT-Pb89 *(PAT1'ก.ค.52)* ถ้า $\arcsin(5x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan(\arcsin x)$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

FPAT-Pb88 *(PAT1'มี.ค.52)* ให้ $-1 \le x \le 1$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$

แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{2552}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $2x$ 2) $1 - 2x^2$ 3) $2x^2 - 1$ 4) $-2x$

SheLL1.6 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$

แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{15} + \arccos(x^2)\right)$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

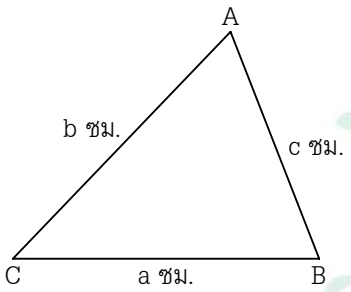
1) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

KAiOU-Pb 2.4 *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ α และ β เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยที่ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ ถ้า $\cos\left(\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \sin\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 1$

แล้ว $\sin\beta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ***ตอบ.....***

สูตร 42.1! ***สูตรของพื้นที่สามเหลี่ยม***

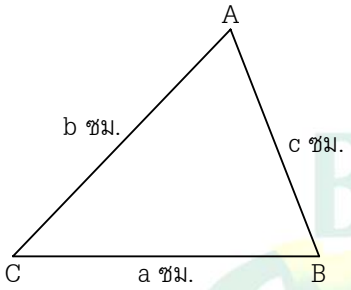


พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\hat{C}$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\hat{A}$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\hat{B}$

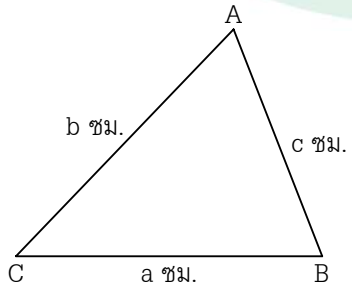
สูตร 42.21! ***กฎของ sin***



กฎของ sin

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

สูตร 42.3! ***กฎของ cos***



กฎของ cos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot bc\cdot\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot ac\cdot\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot ab\cdot\cos C$

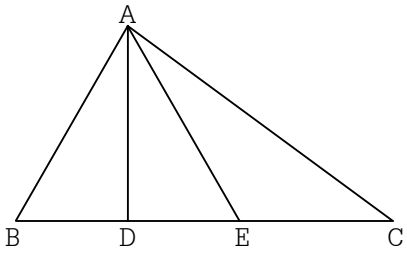
โจทย์ตรีโกณประยุกต์ *แนวกฎของ sin*

BRAN-Pb1.7 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป

ถ้า $A\hat{B}C = 30°$, $B\hat{A}C = 135°$

และ AD และ AE แบ่ง $B\hat{A}C$

ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน แล้ว $\frac{EC}{BC}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



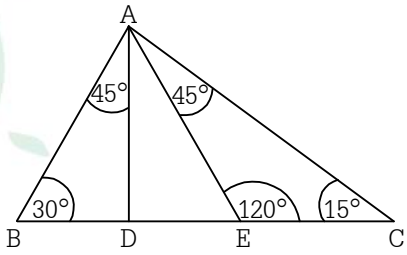
1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\sqrt{3}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{2}$

แนวคิด

ขั้นที่1 ใน ΔABC

จะได้ $A\hat{C}B = 180° - 135° - 30° = 15°$



ขั้นที่2 โดยกฎของไซน์

ได้ $$\frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 135^\circ}{BC}$$

$$\frac{1}{2(AC)} = \frac{1}{\sqrt{2}(BC)}$$

$$BC = \sqrt{2}\,(AC)$$

ขั้นที่3 ใน ΔACE จะได้ $C\hat{A}E = \frac{135^\circ}{3} = 45°$

และ $A\hat{E}C = 180° - 45° - 15° = 120°$

ขั้นที่4 โดยกฎของsin ได้ $$\frac{\sin 120^\circ}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{EC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2(AC)} = \frac{1}{\sqrt{2}(EC)}$$

$$EC = \frac{\sqrt{2}(AC)}{\sqrt{3}}$$

$$EC = \frac{BC}{\sqrt{3}} \rightarrow \therefore \frac{EC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ตอบ

โจทย์ตรีโกณประยุกต์เพิ่มเติม *แนวกฎของ sin*

FPAT-Pb91 *(PAT1'มี.ค.52)* กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เท่ากับ $60°$, BC = $\sqrt{6}$ และ AC = 1 ค่าของ cos(2B) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{3}{4}$

FPAT-Pb92 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และ D เป็นจุดบนด้าน BC ที่ทำให้ $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ ถ้า $\frac{BD}{CD} = 2$ แล้วค่าของ $\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\frac{3}{2}$ 4) 2

โจทย์ตรีโกณประยุกต์เพิ่มเติม *แนวกฎของ cos*

SheLL1.7 *(PAT1'ก.ค.53)* ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, มุม B และ มุม C ตามลำดับ แล้ว $\frac{1}{a}\cos A + \frac{1}{b}\cos B + \frac{1}{c}\cos c$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ 2) $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$ 3) $\frac{(a+b+c)^2}{2abc}$ 4) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

KMK-Pb 1.7 *(PAT1'ต.ค.52)* กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AB ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย ถ้า $BC^3 + AC^3 = 2(BC) + 2(AC)$ แล้ว cot C มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) $\sqrt{3}$

เรื่องลำดับ และ อนุกรม

สูตร ลำดับเลขคณิต

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

เมื่อ d คือ ผลต่างร่วมคงที่

สูตร ลำดับเรขาคณิต

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

เมื่อ r คือ อัตราส่วนร่วมคงที่

➢ **อนุกรมเลขคณิต** คือ อนุกรมที่เกิดจากลำดับเลขคณิต

กำหนดให้ S_n คือ ผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{n}{2}\cdot[a_2 + a_{n-1}] = \ldots$

สูตร 6.1!! ***อนุกรมเรขาคณิต n พจน์***

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$

สูตร 6.1!! ***อนุกรมเรขาคณิต อนันต์พจน์***

$S_n = \frac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $-1 < r < 1$

โจทย์ลำดับเลขคณิต *แนวใช้สูตรพื้นฐาน VS หารลงตัว, หารไม่ลงตัว*

TF-PAT33 *(PAT1'ก.ค.52)* จำนวนเต็มตั้งแต่ 100 ถึง 999 ที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

1) 260 2) 293 3) 300 4) 313

โจทย์ลำดับเลขคณิต *แนวใช้สูตร $a_n = S_n - S_{n-1}$*

****SheLL2.35*** *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดให้ β เป็นจำนวนจริง และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยามโดย $a_n = \frac{\beta n - 7}{n + 2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ถ้าผลบวก 9 พจน์แรกมีค่ามากกว่าผลบวก 7 พจน์แรกของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นจำนวนเท่ากับ a_{108} แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

โจทย์ปัญหาเชาวน์ลำดับเลขคณิต *แนวตัวเลขในตาราง*

SheLL1.25 *(PAT1'ก.ค.53)* พิจารณาการจัดเรียงลำดับของจำนวนคี่ 1, 3, 5, 7, 9, ... ในตารางต่อไปนี้

แถวที่ 1	1
แถวที่ 2	3 5
แถวที่ 3	7 9 11
แถวที่ 4	13 15 17 19
แถวที่ 5	... ...
...	...

จากตารางจะเห็นว่า จำนวน 15 อยู่ในตำแหน่งที่ 2 (จากซ้าย) ของแถวที่ 4
อยากทราบว่า จำนวน 361 จะอยู่ที่ตำแหน่งใดและในแถวที่เท่าใด

1) ตำแหน่งที่ 9 (จากซ้าย) ของแถวที่ 18
2) ตำแหน่งที่ 10 (จากซ้าย) ของแถวที่ 19
3) ตำแหน่งที่ 11 (จากซ้าย) ของแถวที่ 20
4) ตำแหน่งที่ 12 (จากซ้าย) ของแถวที่ 21

โจทย์ลำดับเลขคณิต *แนวใช้สูตรพื้นฐานแนวใหม่*

TF-PAT36 *(PAT1'ก.ค.52)* ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิต ที่สอดคล้องกับ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n}\right) = 5$ และ $a_9 + a_5 = 100$ แล้วค่าของ a_{100} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 495
2) 515
3) 530
4) ตัวเลือก 1) ถึง 3) ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้องเลย

KMK-Pb 2.15 *(PAT1'ต.ค.52)* ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n}\right) = 4$

แล้ว $\sqrt{\frac{a_{17} - a_9}{2}}$ มีค่าเท่าใด ***ตอบ***.....

BRAN-Pb2.38 *(PAT1'ต.ค.53)* **<u>บทนิยาม</u>** ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

เรียกพจน์ a_n ว่าพจน์คู่ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ

เรียกพจน์ a_n ว่าพจน์คี่ ถ้า n เป็นจำนวนคี่

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนคู่และผลบวกของพจน์คี่ทั้งหมด เท่ากับ 36 และผลบวกของพจน์คู่ทั้งหมดเท่ากับ 56 ถ้าพจน์สุดท้ายมากกว่าพจน์แรกเป็นจำนวนเท่ากับ 38 แล้วลำดับเลขคณิต $\{a_n\}$ นี้ มีทั้งหมดกี่พจน์ ***ตอบ***.....

โจทย์ลำดับเรขาคณิต *แนวพื้นฐาน*

SheLL1.17 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดให้ x, y, z เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ r และ $x \neq y$ ถ้า x, 2y, 3z เป็นลำดับเลขคณิต แล้วค่า r เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

โจทย์ลำดับเรขาคณิต *แนวเทคนิคสมมติพจน์*

BRAN-Pb2.49 *(PAT1'ต.ค.53)* ถ้าผลคูณของลำดับเรขาคณิต 3 จำนวนที่เรียงติดกัน เท่ากับ 343 และผลบวกของทั้งสามจำนวนนี้เท่ากับ 57 แล้วค่ามากที่สุดในบรรดา 3 จำนวนนี้ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ลำดับเรขาคณิต *แนวใช้สูตรพื้นฐานแนวใหม่*

****TF-PAT38*** *(PAT1'มี.ค.52)* ให้ a_n เป็นลำดับที่สอดคล้องกับ $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ถ้า $\sum_{n=1}^{10} a_n = 31$ แล้ว $\sum_{n=1}^{2552} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $2^{1275} - 1$ 2) $2^{1276} - 1$

3) $2^{2551} - 1$ 4) $2^{2552} - 1$

โจทย์ลำดับอนุกรมเลขคณิต *แนวใช้สูตรหลากหลาย*

BRAN-Pb1.17 *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยมีสมบัติ ดังนี้

(ก) $a_{15} - a_{13} = 3$

(ข) ผลบวก m พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 325

(ค) ผลบวก 4m พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 4900

แล้วพจน์ a_{2m} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{61}{2}$ 2) $\frac{121}{2}$ 3) $\frac{125}{2}$ 4) 119

โจทย์อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ *แนวใช้สูตรพื้นฐาน VS ลิมิต*

SheLL2.40 *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ k เป็นค่าคงที่

และถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n^5 + n) + 3n^4 + 2}{(n+2)^5} = 15 + 6 + \frac{12}{5} + \ldots + 15\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \ldots$

แล้ว k มีค่าเท่าใด ***ตอบ***.....

TF-PAT40 *(PAT1'มี.ค.52)* ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2b + 1}{2n^2a - 1} = 1$ แล้วจงหาผลบวกของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right)^n$

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) 1 4) หาค่าไม่ได้

****TF-PAT42*** *(B-PAT1'ต.ค.51)* ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^n}\right)$ เท่ากับเท่าใด

1) 1 2) 2 3) 0 4) หาค่าไม่ได้

โจทย์อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ *แนวอนุกรม VS ตรีโกณ*

BRAN-Pb1.6 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้

$T(x) = \sin x - \cos^2 x + \sin^3 x - \cos^4 x + \sin^5 x - \cos^6 x + \ldots$

แล้วค่าของ $3T\left(\frac{\pi}{3}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $4\sqrt{3} - 1$ 2) $5\sqrt{3} - 1$ 3) $6\sqrt{3} - 1$ 4) $7\sqrt{3} - 1$

โจทย์อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ *แนวอนุกรมเรขา ผสม อนุกรมเรขา*

TF-PAT39 *(B-PATต.ค.51)* ผลบวกของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{3^{n+2}}\right)$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{13}{18}$ 2) $\frac{40}{18}$ 3) $\frac{33}{27}$ 4) $\frac{56}{27}$

KAiOU-Pb 1.17 *(PAT1'มี.ค.53)* จงหาผลบวกของอนุกรม $3 + \frac{11}{4} + \frac{33}{16} + \ldots + \frac{3^n + 2^n - 2}{4^{n-1}} + \ldots$

1) $\frac{20}{3}$ 2) $\frac{29}{3}$ 3) $\frac{31}{3}$ 4) $\frac{40}{3}$

โจทย์อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ *แนวใช้สูตรพื้นฐาน แบบ เชอร์ไพส์*

****TF-PAT45*** *(PAT1'มี.ค.52)* ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$

แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ ของ a_2 เท่ากับใดต่อไปนี้

1) 4
2) 2
3) 1
4) หาค่าไม่ได้เพราะ a_2 มีค่ามากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด

โจทย์ลำดับเวียนบังเกิด *แนวแทนค่าดูแนวโน้ม*

BRAN-Pb2.39 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$b_1 = -3$ และ $b_{n+1} = \frac{1 + b_n}{1 - b_n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ b_{1000} เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

โจทย์ลำดับเวียนบังเกิด *แนวใช้เทคนิคผลต่าง*

****BRAN-Pb2.30*** *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และให้ $f : I \to I$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(n + 1) = f(n) + 3n + 2$ สำหรับ $n \in I$

ถ้า $f(-100) = 15000$ แล้ว $f(0)$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

โจทย์ลำดับเวียนบังเกิด *แนวอนุกรมใหม่ๆ ไม่เคยเห็น*

*****BRAN-Pb2.37*** *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$a_1 = 2$ และ $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ สำหรับ $n = 2, 3, \ldots$

แล้วค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

*****SheLL2.34*** *(PAT1'ก.ค.53)* ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

โดยที่ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2 a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ถ้า $a_1 = 100$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

โจทย์อนุกรมสูตร $\sum i^n$

สูตรหลัก 3 สูตร

➢ สูตร3.1!! $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เช่น $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

สูตรหลัก 3 สูตร

➢ สูตร3.2!! $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เช่น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

สูตรหลัก 3 สูตร

➢ สูตร3.3!! $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ เช่น $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

KAiOU-Pb 2.10 *(PAT1'มี.ค.53)* ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ $a_n = \frac{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}{n^2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

SheLL1.23 *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดอนุกรมต่อไปนี้

$$A = \sum_{k=1}^{1000} (-1)^k \quad , \quad B = \sum_{k=3}^{20} k^2 \quad , \quad C = \sum_{k=1}^{100} k \quad , \quad D = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

ค่าของ A + B + C + D เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 7917 2) 7919 3) 7920 4) 7922

TF-PAT41 *(PAT1'ก.ค.52)* ถ้า $L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^k}{1 + 8 + 27 + \ldots + n^3}\right)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก แล้ว จงหา L

1) 1 2) 2 3) 4 4) 8

KMK-Pb 2.16 *(PAT1'ต.ค.52)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n + 12n + 27n + \ldots + 3n^3}{1 + 8 + 27 + \ldots + n^3}\right)$ มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์อนุกรมอนันต์เทเลสโคปิก *แนวส่วนกลับของผลคูณเลขเรียงติดกัน VS แนวใช้เทคนิคผลต่าง*

TF-PAT43 *(B-PAT1'ต.ค.51)* ผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{25}{12}$ 3) $\frac{25}{48}$ 4) หาค่าไม่ได้

BRAN-Pb2.41 *(PAT1'ต.ค.53)* ให้ $S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, ...$

ค่าของ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{S_n}} \right)$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

*****TF-PAT44*** *(PAT1'ก.ค.52)* ถ้า $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4 - n^2}$ แล้ว $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) $\frac{3}{4} + S$ 2) $\frac{5}{4} + S$ 3) $\frac{3}{4} - S$ 4) $\frac{5}{4} - S$

โจทย์อนุกรมอนันต์เทเลสโคปิก *แนวรู้ด VS แนวใช้เทคนิคผลต่าง*

*****KAiOU-Pb 2.11*** *(PAT1'มี.ค.53)* ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}} \right)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

แล้วค่าของ $\lim_{n\to\infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

****BRAN-Pb2.40*** *(PAT1'ต.ค.53)* ค่าของ $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์อนุกรมอนันต์เทเลสโคปิก *แนวโจทย์ใหม่ๆไม่เคยเห็น VS แนวใช้เทคนิคผลต่าง*

*****SheLL2.39*** *(PAT1'ก.ค.53)* กำหนดให้ $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, ...$

ค่าของ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{20}}$ เท่ากับเท่าใด ***ตอบ***.....

*****BRAN-Pb1.16*** *(PAT1'ต.ค.53)* กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

โดยที่ $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, ...$

$\lim_{n\to\infty} \frac{16}{n} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 4 2) $\frac{16}{3}$ 3) 8 4) 16

ลำดับ และ อนุกรม : แนว check นิยาม convergent, divergent

*__KMK-Pb 1.14__ *(PAT1'ต.ค.52)* พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าลำดับ a_n ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ข. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_n}{2^n}\right)$ ลู่เข้า

ข้อใดต่อไปนี้**เป็นจริง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

เฉลยคำตอบ ซีทติวแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ ในส่วนของครู Sup'k

SheLL2.46 เฉลย x = 3
SheLL2.47 เฉลย x = 9
SheLL2.4 เฉลย x = 3
BRAN-Pb1.25 เฉลย 1)
TF-PAT119 เฉลย 4)
TF-PAT120 เฉลย 2)
TF-PAT123 เฉลย 3)
TF-PAT124 เฉลย 3)
BRAN-Pb1.20 เฉลย 4)
KAiOU-Pb 1.24 เฉลย 4)
SheLL2.49 เฉลย 208
QET-G-Pb 26.1 เฉลย 4)
QET-G-Pb 23.2 เฉลย 1)
QET-G-Pb 23.3 เฉลย 4)
KAiOU-Pb 1.22 เฉลย 3)
SheLL1.24 เฉลย 4)
DiAMK-Pb 1.25 เฉลย 2)
SheLL1.10 เฉลย 1)
DiAMK-Pb 1.2 เฉลย 1)
KAiOU-Pb 1.11 เฉลย 2)
Sup'k-Pb2.29.1 เฉลย 2 ตัว
Sup'k-Pb2.29.2 เฉลย 2 ตัว
FPAT-Pb14 เฉลย 2)
FPAT-Pb1 เฉลย 1)
FPAT-Pb3 เฉลย 2)
SheLL1.11 เฉลย 2)
AVATAR-Pb 5.1 เฉลย 2
KMK-Pb 1.8 เฉลย 2)
KAiOU-Pb 1.12 เฉลย 2)
FPAT-Pb4 เฉลย 3)
BRAN-Pb2.27 เฉลย 13
KAiOU-Pb 2.2 เฉลย 5
SheLL2.27 เฉลย 2
SheLL1.14 เฉลย 2)
FPAT-Pb9 เฉลย 1)
FPAT-Pb8 เฉลย 2)
KAiOU-Pb 1.10 เฉลย 1)
FPAT-Pb7 เฉลย 4)
BRAN-Pb1.11 เฉลย 1)
FPAT-Pb11 เฉลย 3)
KMK-Pb 2.10 เฉลย 4
FPAT-Pb12 เฉลย 3)
KMK-Pb 2.9 เฉลย 6
SheLL1.1 เฉลย 2)
KMK-Pb 1.2 เฉลย 1)
FPAT-Pb17 เฉลย 2)
FPAT-Pb18 เฉลย 2)
KAiOU-Pb 1.1 เฉลย 4)
KAiOU-Pb 1.2 เฉลย 3)
FPAT-Pb21 เฉลย 4)
KMK-Pb 1.1 เฉลย 4)
FPAT-Pb22 เฉลย 1)
FPAT-Pb32 เฉลย 2)
FPAT-Pb34 เฉลย 1)
FPAT-Pb35 เฉลย 2)
FPAT-Pb36 เฉลย 4)
FPAT-Pb37 เฉลย 4)
KMK-Pb 1.4 เฉลย 1)
FPAT-Pb39 เฉลย 1)
FPAT-Pb41 เฉลย 1)
FPAT-Pb43 เฉลย 3)
FPAT-Pb42 เฉลย 1)
KMK-Pb 1.5 เฉลย 2)
KAiOU-Pb 1.4 เฉลย 1)
BRAN-Pb1.3 เฉลย 4)
FPAT-Pb46 เฉลย 4)
FPAT-Pb45 เฉลย 2)
SheLL1.4 เฉลย 3)
KAiOU-Pb 1.15 เฉลย 1)
KAiOU-Pb 1.9 เฉลย 4)
FPAT-Pb49 เฉลย 1)
SheLL1.9 เฉลย 2)
BRAN-Pb1.8 เฉลย 4)
KMK-Pb1.9 เฉลย 2)
BRAN-Pb2.34 เฉลย 17
FPAT-Pb50 เฉลย 1)
FPAT-Pb52 เฉลย 4)
KMK-Pb 2.7 เฉลย 5.5

FPAT-Pb54 เฉลย 1)
FPAT-Pb55 เฉลย 4)
FPAT-Pb56 เฉลย 3)
KMK-Pb 2.8 เฉลย 8
KMK-Pb 1.6 เฉลย 4)
FPAT-Pb57 เฉลย 3)
FPAT-Pb58 เฉลย 4)
FPAT-Pb59 เฉลย 1)
KMK-Pb 1.10 เฉลย 1)
FPAT-Pb62 เฉลย 4)
FPAT-Pb63 เฉลย 1)
FPAT-Pb64 เฉลย 3)
KAiOU-Pb 1.8 เฉลย 3)
SheLL1.8 เฉลย 1)
FPAT-Pb77 เฉลย 1)
FPAT-Pb78 เฉลย 1)
FPAT-Pb75 เฉลย 1)
FPAT-Pb70 เฉลย 2)
FPAT-Pb71 เฉลย 3)
FPAT-Pb72 เฉลย 1)
KAiOU-Pb 1.6 เฉลย 4)
FPAT-Pb65 เฉลย 1)
KAiOU-Pb 1.13 เฉลย 1)
AVATAR-Pb 6.1 เฉลย $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$
KMK-Pb 2.3 เฉลย 7.5
FPAT-Pb66 เฉลย 4)
FPAT -Pb66.1 เฉลย 3
FPAT-Pb67 เฉลย 2)
KAiOU-Pb2.22 เฉลย 7
KAiOU-Pb 1.5 เฉลย 2)
SheLL2.28 เฉลย 1
SheLL1.18 เฉลย 1)
BRAN-Pb1.4 เฉลย 2)
FPAT-Pb76 เฉลย 4)
FPAT-Pb79 เฉลย 1)
KMK-Pb 2.4 เฉลย 6
BRAN-Pb2.42 เฉลย 262
TF-PAT4 เฉลย 4)
SheLL2.30 เฉลย 4
KAiOU-Pb 2.7 เฉลย 6
BRAN-Pb1.12 เฉลย 1)
KMK-Pb 1.11 เฉลย 3)
TF-PAT1 เฉลย 2)
TF-PAT2 เฉลย 4)
KAiOU-Pb 2.6 เฉลย 32
KMK-Pb 1.12 เฉลย 4)
AVATAR-Pb 14.1 เฉลย 16
TF-PAT3 เฉลย 4)
BRAN-Pb2.36 เฉลย 396
SheLL1.12 เฉลย 3)
SheLL2.31 เฉลย 4
TF-PAT6 เฉลย 4)
TF-PAT7 เฉลย 3)
KMK-Pb 2.11 เฉลย 0.2
TF-PAT8 เฉลย 3)
TF-PAT9 เฉลย 1)
TF-PAT10 เฉลย 1)
SheLL1.13 เฉลย 3)
KMK-Pb 2.5 เฉลย 2
KAiOU-Pb 2.5 เฉลย 0.5
FPAT-Pb83 เฉลย 2)
SheLL2.29 เฉลย 2
KAiOU-Pb 1.7 เฉลย 3)
KMK-Pb 2.6 เฉลย 0
FPAT-Pb82 เฉลย 3)
BRAN-Pb2.31 เฉลย 1
FPAT-Pb87 เฉลย 1)
FPAT-Pb89 เฉลย 1)
FPAT-Pb88 เฉลย 2)
SheLL1.6 เฉลย 4)
KAiOU-Pb 2.4 เฉลย 0.5
FPAT-Pb91 เฉลย 4)
FPAT-Pb92 เฉลย 1)
SheLL1.7 เฉลย 1)
KMK-Pb 1.7 เฉลย 1)
TF-PAT33 เฉลย 3)
SheLL2.35 เฉลย 2
SheLL1.25 เฉลย 2)
TF-PAT36 เฉลย 2)
KMK-Pb 2.15 เฉลย $2\cdot\sqrt[4]{2}\approx 2.38$
BRAN-Pb2.38 เฉลย 20
SheLL1.17 เฉลย 2)
BRAN-Pb2.49 เฉลย 49
TF-PAT38 เฉลย 2)
BRAN-Pb1.17 เฉลย 2)
SheLL2.40 เฉลย 25
TF-PAT40 เฉลย 2)
TF-PAT42 เฉลย 1)
BRAN-Pb1.6 เฉลย 3)
TF-PAT39 ตอบ 2)
KAiOU-Pb 1.17 เฉลย 4)
TF-PAT45 เฉลย 3)
BRAN-Pb2.39 เฉลย 2
BRAN-Pb2.30 เฉลย 50
BRAN-Pb2.37 เฉลย 0
SheLL2.34 เฉลย 200
KAiOU-Pb 2.10 เฉลย 1
SheLL1.23 เฉลย 1)
TF-PAT41 เฉลย 4)
KMK-Pb 2.16 เฉลย 4
TF-PAT43 เฉลย 3)
BRAN-Pb2.41 เฉลย 2
TF-PAT44 เฉลย 3)
KAiOU-Pb 2.11 เฉลย 1
BRAN-Pb2.40 เฉลย 9
SheLL2.39 เฉลย 7
BRAN-Pb1.16 เฉลย 1)
KMK-Pb 1.14 เฉลย 4)

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programing)

1. กราฟอสมการเชิงเส้น

1. วาดกราฟสมการเชิงเส้น (โดยหาจุดที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นสองจุด มักใช้จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y)
2. พิจารณาอาณาบริเวณ โดยใช้จุดที่ไม่อยู่บนเส้นกราฟทดสอบ (มักใช้จุด (0, 0))
   ถ้าจุดที่ทดสอบสอดคล้องกับอสมการ จะได้กราฟเป็นอาณาบริเวณที่มีจุดนั้นอยู่
   ถ้าจุดที่ทดสอบขัดแย้งกับอสมการ จะได้กราฟเป็นอาณาบริเวณที่อยู่ตรงข้ามกับบริเวณที่มีจุดนั้นอยู่
3. พิจารณาว่าอสมการนั้นยอมรับการเท่ากันได้หรือไม่ โดยเลือกแทนด้วยเส้นทึบหรือเส้นประให้สอดคล้อง

2. กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น

1. วาดกราฟของอสมการเชิงเส้น หาบริเวณที่สอดคล้องในทุกๆ อสมการ (คืออาณาบริเวณที่ซ้อนทับกัน) เรียกอาณาบริเวณนั้นว่า **อาณาบริเวณที่หาคำตอบได้** แล้วหาพิกัดของมุมของอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้
2. ในกรณีที่ระบบอสมการเชิงเส้นมีหลายอสมการ ในการวาดกราฟของอสมการเชิงเส้น อาจต้องหาพิกัดของจุดตัดของสองเส้นก่อน

3. การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีใช้กราฟ

- ปัญหากำหนดการเชิงเส้นประกอบด้วย **ฟังก์ชันจุดประสงค์** (Objective Function) และ **อสมการข้อจำกัด** (Constraint Inequalities)
- ผลเฉลยของปัญหาจะเป็นพิกัดที่อยู่ในบริเวณที่หาคำตอบได้ของระบบอสมการเชิงเส้นที่ได้มาจากอสมการข้อจำกัดโดยเป็นพิกัดที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดตามฟังก์ชันจุดประสงค์
- โดยการใช้การเลื่อนของกราฟฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มีความชันคงที่ แต่มีระยะตัดแกน Y ที่เปลี่ยนแปลง พบว่าคำตอบที่ต้องการจะอยู่ที่จุดมุมของอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้

4. สรุปขั้นตอนการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

1. สมมติตัวแปร กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ และอสมการข้อจำกัด
2. วาดกราฟของระบบอสมการเชิงเส้นที่ได้จากอสมการข้อจำกัด แล้วหาอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้
3. หาพิกัดของจุดมุมของอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้
4. นำจุดมุมทั้งหมดไปทดสอบกับฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยเลือกพิกัดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันสูงสุดหรือต่ำสุดตามที่ต้องการ

ข้อสังเกต ในบางสถานการณ์ปัญหา ต้องการคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม แต่ถ้าพิกัดที่เป็นคำตอบไม่ใช่จำนวนเต็มจะต้องนำพิกัดที่เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ใกล้เคียงกับจุดนั้น มาพิจารณหาพิกัดที่ให้ค่าที่ดีที่สุดแทน

ตัวอย่างข้อสอบ

1. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $a < b$ ถ้าค่า**มากสุด**และค่า**น้อยสุด**ของ $P = 2x + y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $a \leq x + 2y \leq b$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ มีค่าเท่ากับ 100 และ 10 ตามลำดับ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด

2. โรงงานผลิตตุ๊กตาแห่งหนึ่งมีต้นทุนในการผลิตตุ๊กตา x ตัว โรงงานจะต้องเสียค่าใช้จ่าย $x^3 - 450x^2 + 60{,}200x + 10{,}000$ บาท ถ้าขายตุ๊กตาราคาตัวละ 200 บาท โรงงานจะต้องผลิตตุ๊กตากี่ตัวจึงจะได้กำไร**มากที่สุด**

เฉลย

1. 70 **2.** 200

เวกเตอร์ (Vectors)

1. ระบบพิกัดฉากสามมิติ

ทฤษฎีบท ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ $|\overrightarrow{PQ}|$ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

2. เวกเตอร์

ปริมาณสเกลาร์ (Scalar Quantity) คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาด

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector Quantity) คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง

การเขียนปริมาณเวกเตอร์

1. เขียนแทนด้วยส่วนของเส้นตรงในระนาบ
   ใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ แทนเวกเตอร์จาก A ไป B ซึ่งคือ ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศจาก A ไป B เรียก A ว่า จุดเริ่มต้น (Initial Point) เรียก B ว่า จุดสิ้นสุด (Terminal Point)
2. เขียนโดยใช้ตัวเลข
   ถ้าจุด A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2) จะแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

   ถ้าจุด A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2) จะแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

   (ใช้จุดสิ้นสุดลบจุดเริ่มต้น)

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ และมีทิศทางตรงข้ามกัน แทนด้วย $-\vec{u}$

ขนาดของเวกเตอร์

ถ้าจุด A และ B มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) แล้ว $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ และถ้าจุด A และ B มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ (x_2, y_2, z_2) แล้ว $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ซึ่ง $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ซึ่งเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

โคไซน์แสดงทิศทาง (Direction Cosines) โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{a}$ เมื่อ $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\vec{a}| \neq 0$ เทียบกับแกน X, Y และ Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับ ดังนี้ $\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

บทนิยาม เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงข้ามกันก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

นิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d, b = e$ และ $c = f$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}$	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - d \\ b - e \\ c - f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

1. ถ้า $c > 0$ แล้ว $c\vec{u}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $c|\vec{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$
2. ถ้า $c < 0$ แล้ว $c\vec{u}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $-c|\vec{u}|$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$
3. ถ้า $c = 0$ แล้ว $c\vec{u} = 0$
4. ให้ m และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว
   (i) $(m + n)\vec{u} = m\vec{u} + n\vec{u}$
   (ii) $(mn)\vec{u} = m(n\vec{u})$
   (iii) $m(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{u} + m\vec{v}$

การขนานกันของเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่ $\vec{0}$ จะกล่าวว่า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกันก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง c ที่ไม่ใช่ 0 ที่ทำให้ $\vec{u} = c\vec{v}$

3. ผลคูณเชิงสเกลาร์

ถ้า $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ จะได้ว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

ถ้า $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ จะได้ว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

และ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$

เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$, $0° \le \theta \le 180°$ (แบบใช้จุดเริ่มต้นต่อกับจุดเริ่มต้น)

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. ถ้า $\vec{u} = 0$ หรือ $\vec{v} = 0$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
5. ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$ หรือ $\vec{v} \neq \vec{0}$ แล้ว $\vec{u} \perp \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
6. $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \pm 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$
7. ให้ D เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{OB}$ ที่ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{OB}$ จะได้ว่า $\overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\right)$

4. ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แทนด้วย $\vec{u} \times \vec{v}$ คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ หรือ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
4. $\vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$
5. $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$
6. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
7. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
8. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
9. ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ว่า $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$
   เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$, $0° \le \theta \le 180°$ (แบบใช้จุดเริ่มต้นต่อกับจุดเริ่มต้น)
10. สำหรับ $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ จะได้ว่า $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$ เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านไม่ขนานยาว $|\bar{u}|$ และ $|\bar{v}|$ หน่วย

การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})|$ เป็นปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน (Parallelepiped) ที่มีด้านกว้าง ยาว สูง เป็น $\bar{r}$, $\bar{v}$ และ $\bar{u}$ ตามลำดับ

ข้อสังเกต 1. $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{r} \times \bar{u})$

$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = -\bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{v}) = -\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{r}) = -\bar{r} \cdot (\bar{v} \times \bar{u})$

2. ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = \bar{0}$

3. $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{r} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\bar{u} \times \bar{u}) = \bar{0}$

ตัวอย่างข้อสอบ

1. กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่**ไม่เท่ากับ**เวกเตอร์ศูนย์ซึ่ง $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ และ $\bar{u} + \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u} - \bar{v}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $|\bar{u}| = |\bar{v}|$

ข. $\bar{u} + 2\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $2\bar{u} - \bar{v}$

ข้อใดต่อไปนี้**เป็นจริง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี D เป็นจุดบนด้าน AC และ F เป็นจุดบนด้าน BC ถ้า $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{DF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$ แล้ว $\frac{a}{b}$ มีค่าเท่าใด

3. ให้ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย $\bar{a} = \bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} - 3p\bar{k}$ และ $\bar{b} = -2p\bar{i} + 2\bar{j} + p\bar{k}$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริง ถ้า $\bar{a}$ ตั้งฉากกับ $\bar{b}$ และขนาดของ $\bar{b}$ เท่ากับ 3 แล้ว ค่าของ p อยู่ในช่วงข้อใดต่อไปนี้

1) $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ 2) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 3) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

4. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = 2\bar{i} - d\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{w} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{w} = 2$, $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = 3$, $\bar{v} + \bar{w} = \bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$ เมื่อ q, r เป็นจำนวนจริง และ $\bar{w}$ ขนานกับ $-\frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$ แล้วค่าของ $a + 4b + 2c$ เท่ากับเท่าใด

5. กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\bar{u} = \bar{i} + \sqrt{3}\bar{j}$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 4$ ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) $\sqrt{13}$ 4) 4

6. กำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$

ให้ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\bar{u} \cdot \bar{w} = -11$ และ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 8$

ถ้า θ เป็นมุมแหลมที่เวกเตอร์ $\bar{w}$ ทำมุมกับเวกเตอร์ $5\bar{i} + \bar{j}$ แล้ว $\tan\theta + \sin 2\theta$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 1) **2.** 9 **3.** 2) **4.** 3 **5.** 2) **6.** 2

จำนวนเชิงซ้อน (Complex)

1. จำนวนเชิงซ้อน

เซต $C = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$ จะเรียกว่า **เซตของจำนวนเชิงซ้อน** ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆ สมาชิก (a, b) และ (c, d) ใน C

1. $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

จำนวนเชิงซ้อน (a, b) นิยมเขียนแทนด้วย $a + bi$ เรียก a ว่า **ส่วนจริง** และเรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ**

ข้อสังเกต 1. $c(a, b) = (ca, cb)$

2. $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ นิยามสังยุคของ z แทนด้วย $\bar{z}$ คือ $\bar{z} = a - bi$

สมบัติ

1. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
5. $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ โดยที่ $\bar{z}_2 \neq 0$
6. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ เมื่อ Re(z) คือ ส่วนจริงของ z
7. $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)$ เมื่อ Im(z) คือ ส่วนจินตภาพของ z
8. $\bar{\bar{z}} = z$

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ นิยามค่าสัมบูรณ์ของ z แทนด้วย $|z|$ คือ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติ

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|z| = |-z|$
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|, z_2 \neq 0$
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
6. $|z| = |\bar{z}|$
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
8. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

2. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = a + bi$ โดยที่ $z \neq 0$ และ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดซึ่ง $\tan\theta = \frac{b}{a}$ จะได้ว่า **รูปเชิงขั้วของ z** คือ $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียก θ ว่า **อาร์กิวเมนต์** (Argument) ของ z

การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์

โดย $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

และ $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ จะได้ว่า

1. $z_1z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
3. $z_1^n = |z_1|^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1)$

การแก้สมการจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

กำหนดให้ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ และ $a_n \neq 0$ จะได้ว่า ถ้า $f(z) = 0$ แล้ว $f(\bar{z}) = 0$ ด้วย

นั่นคือ ถ้า z เป็นคำตอบของสมการแล้ว $\bar{z}$ จะเป็นคำตอบของสมการด้วย

ตัวอย่างข้อสอบ

1. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับ $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$ และ $z \neq 0$ ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ z อยู่ในช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ แล้ว $\frac{z^4}{(\bar{z})^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $-2i$ 2) $1 - i$ 3) $1 + i$ 4) $2i$

2. กำหนดให้ w, z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\bar{w} = z - 2i$ และ $|w|^2 = z + 6$ ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ w อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ และ $w = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด

3. ให้ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + i$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ ค่าสัมบูรณ์ของ z_{111} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{110}$

4. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ $\bar{z}_2$ แทนสังยุค (Conjugate) ของ z_2 ถ้า $5z_1 + 2z_2 = 5$ และ $\bar{z}_2 = 1 + 2i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้วค่าของ $|5z_1^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด

5. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1^{-1} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ เมื่อ $i^2 = -1$ และ $5z_1 + 2z_2 = 5$ แล้ว $\bar{z}_2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (เมื่อ $\bar{z}_2$ แทนสังยุค (Conjugate) ของ z_2)

1) $3 - 2i$ 2) $3 + 2i$ 3) $1 - 2i$ 4) $1 + 2i$

6. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่**น้อยที่สุด**ที่ทำให้ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 1) **2.** 4 **3.** 2) **4.** 5 **5.** 4) **6.** 8

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล
(Functional Relation Between Data)

1. การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. ความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม
2. การเขียนแผนภาพการกระจาย

2. ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด

สมการเส้นตรง : รูปทั่วไป คือ $y = mx + c$

สมการปกติ

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

สมการเส้นพาราโบลา : รูปทั่วไป คือ $y = ax^2 + bx + c$

สมการปกติ

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

สมการเอกซ์โพเนนเชียล : รูปทั่วไป คือ $y = ab^x$ หรือ $\log y = \log a + x \log b$

สมการปกติ

$$\sum_{i=1}^{n} \log y_i = n \log a + \log b \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i = \log a \sum_{i=1}^{n} x_i + \log b \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

3. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลา

เราสามารถแทนข้อมูลที่เป็นตัวแปรอิสระซึ่งเป็นช่วงเวลาที่ห่างเท่ากันได้ดังนี้

ถ้าจำนวนช่วงเวลาที่นำมาสร้างความสัมพันธ์เป็นจำนวนคี่ มักจะแทนด้วย ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ... โดยให้ช่วงเวลาที่อยู่ตรงกลางเป็น 0

ถ้าจำนวนช่วงเวลาที่นำมาสร้างความสัมพันธ์เป็นจำนวนคู่ มักจะแทนด้วย ..., −5, −3, −1, 1, 3, 5, ... โดยให้ช่วงเวลาที่อยู่ตรงกลางเป็น −1 และ 1

ข้อสังเกต 1. รู้ตัวแปรอิสระทำนายตัวแปรตาม **ไม่สามารถทำนายกลับได้**
(ถ้าจะทำนายต้องสลับตัวแปรแล้วสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันใหม่)

2. เมื่อจะทำนายความสัมพันธ์ในรูปอนุกรมเวลา ต้องแปลงข้อมูลก่อน
3. สำหรับสมการรูปเส้นตรง $(\bar{x}, \bar{y})$ อยู่บนเส้น
4. สำหรับสมการรูปเส้นตรง $\Delta y = m\Delta x$

ตัวอย่างข้อสอบ

1. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (X) และวิชาฟิสิกส์ (Y) ของนักเรียน 100 คนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ได้พจน์ต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่าคงตัวจากสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีรูปสมการเป็น $Y = a + bX$ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{100} y_i = 1000, \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 2000, \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4000$$

ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนายสมชายเท่ากับ 15 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (โดยประมาณ) ของนายสมชายเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 16 คะแนน 2) 16.67 คะแนน 3) 17 คะแนน 4) 17.67 คะแนน

2. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 (X) และปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (Y) จากตัวอย่างอาหารจำนวน 100 ตัวอย่าง พบว่าความแปรปรวนของปริมาณสารชนิดที่ 1 มีค่าเท่ากับ 1.75 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของปริมาณสารชนิดที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.5, $\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 100$ และ $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 200$ ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$ แล้วเมื่อพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 อยู่ 4 หน่วย จะพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (โดยประมาณ) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0.5 หน่วย 2) 1 หน่วย 3) 1.5 หน่วย 4) 2 หน่วย

3. กำหนดให้ข้อมูล X และ Y มีความสัมพันธ์กันดังตารางต่อไปนี้

X	1	2	3	3
Y	1	3	4	6

ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$ แล้วเมื่อ $X = 10$ ค่าของ Y เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 2) **2.** 4) **3.** 19

สถิติ (Statistics)

1. ข้อมูล

ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์ทางสถิติมีสองประเภท คือ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ ซึ่งจะเห็นค่าของข้อมูลทุกตัว และข้อมูลที่แจกแจงความถี่ จะเห็นเป็นอันตรภาคชั้น

ความกว้างของอันตรภาพชั้น = ขอบบน − ขอบล่าง

จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้น = $\frac{\text{ขอบบน + ขอบล่าง}}{2}$

2. การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต, Mean, $\bar{x}$

$\bar{x}$ ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

$\bar{x}$ ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i x_i}{N}$

ข้อสังเกต 1. $\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$

2. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = 0$

3. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = \bar{x}$

4. ถ้า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x}$

$x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \ldots, x_n + k$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x} + k$

$x_1k, x_2k, x_3k, \ldots, x_nk$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x}k$

5. $\bar{x}$ รวม $= \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_2 + N_2}$

2. มัธยฐาน, Median, Me

Me สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

Me = ค่าของข้อมูลตำแหน่งตรงกลาง (ตัวที่ $\frac{N+1}{2}$) เมื่อเรียงลำดับข้อมูลแล้ว

Me สำหรับข้อมูลที่แจกแจงความถี่

$$Me = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - \sum f_L\right)}{f_M} I$$

ข้อสังเกต 1. การหามัธยฐานมีสองขั้นตอน คือ หาตำแหน่ง และหาค่าโดยใช้สูตรหรือการเทียบบัญญัติไตรยางค์

2. $\sum_{i=1}^{N} | x_i - a |$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ a = Me

3. ฐานนิยม, Mode, Mo

Mo สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

Mo = ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด

Mo สำหรับข้อมูลที่แจกแจงความถี่

Mo = จุดกึ่งกลางของชั้นที่มีความถี่สูงสุด (แบบหยาบ)

$$= L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) I$$ (แบบละเอียด)

ข้อสังเกต 1. ใช้ได้กับข้อมูลเชิงคุณภาพ

2. ถ้าแต่ละอันตรภาคชั้นมีความกว้างต่างกัน ต้องถ่วงด้วยน้ำหนักของความกว้างด้วย

4. ความสัมพันธ์ของ $\bar{x}$, Me และ Mo

$\bar{x} = Me = Mo$	$\bar{x} > Me > Mo$	$\bar{x} < Me < Mo$
โค้งปกติ	**โค้งเบ้ขวา**	**โค้งเบ้ซ้าย**

3. การวัดตำแหน่งของข้อมูล

เราจะมองการวัดตำแหน่งของข้อมูลเป็นเหมือนภาคขยายของการหามัธยฐาน ซึ่งมีสองขั้นตอน คือ การหาตำแหน่งและการหาค่า

1. ควอไทล์ (Quartiles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน โดย Q_1, Q_2, และ Q_3 คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 3 ตัว

Q_r ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ Q_r คือ $\frac{r(N+1)}{4}$

การหาค่า : ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์

Q_r ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ Q_r คือ $\frac{rN}{4}$

การหาค่า : $Q_r = L + \frac{\left(\frac{rN}{4} - \sum f_L\right)}{f_M} I$

2. เดไซล์ (Deciles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆ กัน โดย D_1, D_2, ..., D_9 คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 9 ตัว

D_r ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ D_r คือ $\frac{r(N+1)}{10}$

การหาค่า : ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์

D_r ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ D_r คือ $\frac{rN}{10}$

การหาค่า : $D_r = L + \frac{\left(\frac{rN}{10} - \sum f_L\right)}{f_M} I$

3. เปอร์เซ็นไทล์ (Percentiles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆ กัน มี P_1, P_2, ..., P_{99} คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 99 ตัว

P_r ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ P_r คือ $\frac{r(N+1)}{100}$

การหาค่า : ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์

P_r ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ P_r คือ $\frac{rN}{100}$

การหาค่า : $P_r = L + \frac{\left(\frac{rN}{100} - \sum f_L\right)}{f_M} I$

4. การวัดการกระจายของข้อมูล

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (Absolute Variation) ใช้เพื่อวัดการกระจายของข้อมูลชุดเดียว

1.1 พิสัย (Range)

$$\text{Range} = x_{max} - x_{min}$$

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ (Quartile Deviation)

$$\text{Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

1.3 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean Deviation)

$$\text{M.D.} = \frac{\sum_{i=1}^{N} | x_i - \bar{x} |}{N}$$

1.4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation)

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

2. การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (Relative Variation) ใช้เพื่อต้องการเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลมากกว่าหนึ่งชุด

2.1 สัมประสิทธิ์พิสัย

$$\text{สัมประสิทธิ์พิสัย} = \frac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}}$$

2.2 สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์

$$\text{สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

2.3 สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย

$$\text{สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย} = \frac{\text{M.D.}}{\bar{x}}$$

2.4 สัมประสิทธิ์การแปรผัน

$$\text{สัมประสิทธิ์การแปรผัน} = \frac{\text{S.D.}}{\bar{x}}$$

ข้อสังเกต 1. ความแปรปรวน (Variance) = $\text{S.D.}^2 = S^2$

2. $\text{S.D.} \geq 0$

3. $\text{S.D.} = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \bar{x}$

4. ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น S.D. ความแปรปรวนเป็น S.D.^2

   $x_1 + k, x_2 + k, \ldots, x_n + k$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น S.D. ความแปรปรวนเป็น S.D.^2

   $x_1k, x_2k, \ldots, x_nk$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\text{S.D.}|k|$ ความแปรปรวนเป็น S.D.^2k^2

5. ค่ามาตรฐาน

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S.D.}$$

ข้อสังเกต 1. ข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติจะมี $\bar{x} = Me = Mo$

2. พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติเท่ากับ 1 หรือ 100% ซึ่งคือ ปริมาณข้อมูลทั้งหมด

3. การแจกแจงปกติมาตรฐาน คือ การแจกแจงปกติที่มี $\bar{x} = 0$ และ S.D. = 1

4. $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ จะมี $\bar{x} = 0$ และ S.D. = 1

5. ค่า z สามารถเป็นได้ทั้งบวก ($x_i > \bar{x}$) และลบ ($x_i < \bar{x}$)

6. $z_i = 0 \leftrightarrow x_i = \bar{x}$

7. โดยมาก $-3 < z_i < 3$

8. มีความสัมพันธ์ระหว่าง คะแนนมาตรฐาน, คะแนนดิบ, ค่าเฉลี่ยเลขคณิต, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน, ปริมาณข้อมูล, เปอร์เซ็นไทล์

ตัวอย่างข้อสอบ

1. กำหนดให้ความสูงของคนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ ถ้ามีคน**สูงกว่า** 145 เซนติเมตรและ 165 เซนติเมตรอยู่ 84.13% และ 15.87% ตามลำดับ แล้วส้มประสิทธิ์ของความแปรผันของความสูงของคนกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

Z	1.00	1.12	1.14	1.16
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานจาก 0 ถึง z	0.3413	0.3686	0.3729	0.3770

1) $\frac{1}{31}$ 2) $\frac{2}{31}$ 3) $\frac{3}{31}$ 4) $\frac{4}{31}$

2. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ หยิบข้อมูล x_1, x_2, x_3 มาคำนวณค่ามาตรฐานปรากฏว่าได้ค่าเป็น z_1, z_2, z_3 ตามลำดับ ถ้า $z_1 + z_2 = z_3$ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $x_1 + x_2 - x_3$ 2) $x_1 - x_2 - x_3$ 3) $x_3 - x_2 - x_1$ 4) $x_1 + x_2 + x_3$

3. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงจาก**น้อย**ไป**มาก** เป็นดังนี้ 1, 4, x, y, 9, 10 ถ้ามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ $\frac{8}{3}$ แล้ว y - x มีค่าเท่าใด

4. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวนและมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 12 ถ้าควอไทล์ที่ 1 และ 3 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 5 และ 20 ตามลำดับ แล้วเดไซล์ที่ 5 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่าใด

5. กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงอายุของคนในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

อายุ (ปี)	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
จำนวน (คน)	5	10	A	20	10	10

ถ้าอายุเฉลี่ยของคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับ 33.33 ปี แล้วจำนวนคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับเท่าใด

6. นักเรียนห้องหนึ่งสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 40 คะแนน ถ้านักเรียนชายสอบได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต 35 คะแนน และนักเรียนหญิงสอบได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต 50 คะแนน อัตราส่วนของนักเรียนชายต่อนักเรียนหญิงตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) 3 : 2 2) 2 : 3 3) 2 : 1 4) 1 : 2

7. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 72 คะแนน ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 600 ถ้ามีนักเรียนมาเพิ่มอีก 1 คน ซึ่งสอบได้ 60 คะแนน ทำให้ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนไปเป็น 70 คะแนน ความแปรปรวนของข้อมูลชุดใหม่เท่ากับเท่าใด

8. จากการสำรวจน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 4 คน มี 2 คน น้ำหนักเท่ากันและหนักน้อยกว่าอีก 2 คนที่เหลือ ถ้าฐานนิยม มัธยฐาน และพิสัยของน้ำหนักของนักเรียน 4 คนนี้ คือ 45, 46 และ 6 กิโลกรัม ตามลำดับ แล้วความแปรปรวนของน้ำหนักของนักเรียน 4 คนนี้เท่ากับเท่าใด

9. ในการสอบคัดเลือกเข้าศึกษาต่อของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ถ้าสอบได้คะแนน 700 คะแนน แปลงคะแนนเป็นค่ามาตรฐานได้ 4 แต่ถ้าสอบได้ 400 คะแนน แปลงเป็นค่ามาตรฐานได้ -2 แล้วสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับร้อยละเท่าใด

10. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 30 คน มีคะแนนเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 คะแนน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนนของนักเรียนกลุ่มนี้เพียง 29 คน เท่ากับ 2.5 แล้วนักเรียนอีก 1 คนที่เหลือสอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 35 2) 58 3) 60 4) 85

11. มีนักเรียน 5 คน ร่วมกันบริจาคเงินได้เงินรวม 360 บาท ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 660 ถ้ามีนักเรียนเพิ่มอีก 1 คนมาร่วมบริจาคเป็นเงิน 60 บาท ความแปรปรวนจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) เพิ่มขึ้น 80 2) เพิ่มขึ้น 90 3) ลดลง 80 4) ลดลง 90

12. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง ถ้านักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้สอบได้ 55 คะแนน คิดเป็นคะแนนมาตรฐานได้เท่ากับ 0.5 และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (Coefficient of Variation) ของคะแนนนักเรียนห้องนี้เท่ากับ 20% คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนห้องนี้เท่ากับเท่าใด

13. สร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนการสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง โดยให้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วปรากฏว่ามัธยฐานของคะแนนการสอบเท่ากับ 57 คะแนน ซึ่งอยู่ในช่วง 50-59 ถ้ามีนักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 คะแนน อยู่จำนวน 12 คน และมีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 59.5 คะแนน อยู่จำนวน 20 คน จงหาว่านักเรียนกลุ่มนี้มีทั้งหมดกี่คน

เฉลย

1. 2) **2.** 1) **3.** 2 **4.** 10 **5.** 1.625 (โจทย์บกพร่อง)
6. 3) **7.** 520 **8.** 6 **9.** 10 **10.** 1)
11. 4) **12.** 50 **13.** 36

วิธีเรียงสับเปลี่ยน วิธีจัดหมู่ และความน่าจะเป็น
(Permutation, Combination, and Probability)

1. หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

กฎการบวก ถ้าการทำงานหนึ่งอย่างแบ่งออกเป็น n กรณีย่อยโดยในแต่ละกรณีเป็นการทำงานที่เสร็จสิ้น จำนวนวิธีในการทำงานจะเท่ากับผลรวมของจำนวนวิธีของทุกกรณี

กฎการคูณ

1. ถ้างานที่ทำแบ่งออกเป็นสองขั้นตอน โดยงานขั้นตอนแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีในการเลือกทำงานอย่างแรกนี้สามารถเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานชิ้นนี้ คือ n_1n_2 วิธี

2. ถ้างานที่ทำแบ่งออกเป็น k ขั้นตอน โดยงานขั้นตอนแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีในการเลือกทำงานอย่างแรกนี้สามารถเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี ในแต่ละวิธีในการเลือกทำงานอย่างที่สองสามารถเลือกทำงานอย่างที่สามได้ n_3 วิธี ฯลฯ จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานชิ้นนี้ คือ $n_1n_2n_3 \dots n_k$ วิธี

นิยาม กำหนดให้ $n \in N$ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ และ $0! = 1$

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

กฎข้อที่ 1 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ n!

กฎข้อที่ 2 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันโดยนำมาเรียงแค่ r สิ่ง ($r \le n$) คือ ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

กฎข้อที่ 3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $(n-1)!$

กฎข้อที่ 4 ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี

n_1 สิ่งที่เหมือนกันอยู่กลุ่มที่หนึ่ง

n_2 สิ่งที่เหมือนกันอยู่กลุ่มที่สอง

$\vdots$

n_k สิ่งที่เหมือนกันอยู่กลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง n สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

กฎข้อที่ 5 จำนวนวิธีเลือกสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน ทีละ r สิ่ง ($r \le n$) เท่ากับ $\binom{n}{r} = {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

เทคนิค การนับจำนวนฟังก์ชัน, คอมพลีเมนท์, การจัดเรียงของให้ติดกันโดยการมัด

3. ความน่าจะเป็น

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองใดๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถทำนายผลล่วงหน้าได้

แซมเปิลสเปซ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

เหตุการณ์ คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E แทนด้วย } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

สมบัติบางประการของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(\phi) = 0$
3. $P(S) = 1$
4. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
5. $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$
6. $P(E) = 1 - P(E')$

4. ทฤษฎีบททวินาม

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

เรียก $\binom{n}{r}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม**

ข้อสังเกต

1. การกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ $n+1$ พจน์
2. ในแต่ละพจน์ผลรวมของกำลังของ a และ b จะได้เท่ากับ n
3. พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(a+b)^n$

$$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

ตัวอย่างข้อสอบ

1. ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีเขียว 4 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ถ้าหยิบลูกแก้วจากถุงทีละลูก 3 ครั้ง โดย**ไม่ใส่คืน** แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วลูกที่หนึ่ง สอง และสาม เป็นสีแดง สีเขียว และสีเหลือง ตามลำดับ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{21}$ 2) $\frac{1}{22}$ 3) $\frac{3}{22}$ 4) $\frac{3}{25}$

2. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดชำรุด 3 หลอด ถ้าหยิบหลอดไฟจากกล่องมา 4 หลอด แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดชำรุด**ไม่เกิน** 1 หลอด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{14}{99}$ 4) $\frac{14}{55}$

3. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมเป็น 7 โดยที่มีลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม**ไม่น้อยกว่า** 4 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{12}$

4. มีสิ่งของซึ่งแตกต่างกันอยู่ 8 ชิ้น ต้องแบ่งให้คน 2 คน คนหนึ่งได้ 6 ชิ้น และอีกคนหนึ่งได้ 2 ชิ้น จะมีจำนวนวิธีแบ่งกี่วิธี

5. กล่องใบหนึ่งบรรจุเสื้อยืด 13 สี สีละ 4 ตัว โดยที่เสื้อยืดในแต่ละสีมีขนาด S, M, L และ XL ตามลำดับ สุ่มหยิบเสื้อจากกล่องมา 3 ตัวพร้อมๆ กัน ความน่าจะเป็นที่จะได้เสื้อยืดมีสีเหมือนกัน 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{72}{425}$ 2) $\frac{72}{5525}$ 3) $\frac{3}{221}$ 4) $\frac{3}{22100}$

6. กำหนดให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ และ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ใน S จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

ข. ถ้า $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A \cup B') = 0.7$ แล้ว $P(A - B) = 0.4$

ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด 3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

7. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ จำนวนเต็มบวกที่มีค่า**น้อยกว่า** 300 โดยสร้างมาจากตัวเลขในเซต A และตัวเลขแต่ละหลัก**ไม่**ซ้ำกันเท่ากับเท่าใด

8. คณะกรรมการชุดหนึ่งมี 7 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และกรรมการอีก 4 คน จำนวนวิธีที่จัดกลุ่มคน 7 คนนี้นั่งประชุมรอบโต๊ะกลม โดยให้ประธานและรองประธานนั่งติดกันเสมอ แต่เลขานุการ**ไม่**นั่งติดกับรองประธานเท่ากับเท่าใด

9. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมๆ กัน ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากับ 7 หรือผลคูณของหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากับ 12 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{18}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{2}{9}$ 4) $\frac{4}{9}$

10. มีข้อสอบปรนัย 20 ข้อ คะแนนเต็ม 50 คะแนน โดยกำหนดข้อ 1-10 ข้อละ 4 คะแนน และข้อ 11-20 ข้อละ 1 คะแนน ถ้าหากนักเรียนตอบข้อใดถูกต้องจะได้คะแนนเต็มของข้อนั้น แต่ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบจะได้คะแนน 0 คะแนน จะมีกี่วิธีที่นักเรียนคนหนึ่งจะทำข้อสอบชุดนี้ได้คะแนนรวม 45 คะแนน

11. กำหนดให้ A = {1, 2, 3, ..., 9, 10} จงหาจำนวนสับเซตของ A ทั้งหมดที่ประกอบด้วยสมาชิก 8 ตัวที่แตกต่างกัน โดยที่ผลรวมของสมาชิกทั้ง 8 ตัว เป็นพหุคูณของ 5

เฉลย

1. 2)	**2.** –	**3.** 3)	**4.** 59	**5.** 1)
6. 2)	**7.** 44	**8.** 192	**9.** 3)	**10.** 352
11. 9				

แคลคูลัส (Calculus)

1. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a ทางด้านซ้ายของเส้นจำนวน ($x < a$) แล้วค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L จะกล่าวว่า **L เป็นลิมิตซ้ายของ f ที่ a** แทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a ทางด้านขวาของเส้นจำนวน ($x > a$) แล้วค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L จะกล่าวว่า **L เป็นลิมิตขวาของ f ที่ a** แทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$

ถ้าลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน f เท่ากัน และมีค่าเท่ากับ L จะกล่าวว่า
ฟังก์ชัน f มีลิมิตเป็น L ที่ a แทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

ถ้าลิมิตทางซ้ายไม่เท่ากับลิมิตทางขวา หรือลิมิตข้างใดข้างหนึ่งหาค่าไม่ได้ จะกล่าวว่า **ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ a**

ทฤษฎีบทของลิมิต

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีลิมิตที่จุด a จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in N$
4. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
5. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
7. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$ เมื่อ $n \in N$
9. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ เมื่อ $n \in N$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$
10. $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{\frac{n}{m}} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\frac{n}{m}}$ เมื่อ $n, m \in N$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$
11. ถ้า f เป็นฟังก์ชันพหุนาม นั่นคือ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวโดย $a_n \neq 0$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

นิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน **f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a** ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f มีสมบัติต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้
2. f(a) หาค่าได้
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

นิยาม ถ้า y = f(x) เป็นฟังก์ชันใดๆ และ h เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง x + h คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ใดๆ คือ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

นิยาม ถ้า y = f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตที่ได้นี้ว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x** แทนด้วย $f'(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$ และ $\frac{dy}{dx}$

ทฤษฎีบทของอนุพันธ์

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c คือ ค่าคงที่
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใดๆ
4. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$
5. $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ c คือ ค่าคงที่ใดๆ
6. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$
8. $\frac{d}{dx}\ gof(x) = \frac{d}{dy}g(y)\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ y = f(x) (กฎลูกโซ่ (Chain Rule))
9. $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน

นิยาม ถ้า $f'(x)$ หาอนุพันธ์ได้แล้วจะเรียกอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ว่า **อนุพันธ์อันดับสองของ f** แทนด้วย $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถนิยามอนุพันธ์อันดับ 3, 4, ... ของฟังก์ชัน ตลอดจนกำหนดสัญลักษณ์ได้โดยวิธีเดียวกัน

การประยุกต์ของอนุพันธ์

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ถ้า f เป็นสมการเส้นโค้ง ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(a, f(a))$ คือ $f'(a)$

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด กำหนดให้ f มีโดเมนเป็น D_f ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(a, b) \subset D_f$ ถ้า $f'(c) > 0$ ทุก $c \in (a, b)$ และฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดบน $(a, b) \subset D_f$ ถ้า $f'(c) < 0$ ทุก $c \in (a, b)$

ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

กำหนดให้ f มีโดเมนเป็น D_f

ฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**ที่จุด $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ และ $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f(c) > f(x)$ สำหรับทุกๆ x ในช่วง (a, b) ที่ $x \neq c$

ฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**ที่จุด $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ และ $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f(c) < f(x)$ สำหรับทุกๆ x ในช่วง (a, b) ที่ $x \neq c$

นิยาม ถ้า $f'(c) = 0$ แล้วเราจะเรียก c ว่า **ค่าวิกฤต**ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดวิกฤต**ของ f

ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆ บน $(a, b) \subset D_f$ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f แล้ว

ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

โจทย์ปัญหาค่าสุดขีด ทำความเข้าใจปัญหาเพื่อสร้างฟังก์ชัน $f(x)$ โดยให้ $f(x)$ เป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบค่าสุดขีด และตัวแปร x คือ สิ่งที่ส่งผลต่อค่าสุดขีดนั้น

4. การอินทิเกรต

นิยาม ฟังก์ชัน F เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของฟังก์ชัน f เมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in D_f$ ใช้ $\int f(x)dx$ แทน $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ และเรียก $\int f(x)dx$ ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f**

ทฤษฎีบท

1. $\int kdx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
4. $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

อินทิกรัลจำกัดเขต

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ถ้า F เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง [a, b] โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

เรียก $\int_a^b f(x)dx$ ว่า **อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f** บน [a, b] ใช้สัญลักษณ์ $F(x)\Big|_a^b$ แทน $F(b) - F(a)$

ทฤษฎีบท

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ เมื่อ $c \in (a, b)$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

นิยาม กำหนดให้ฟังก์ชัน f(x) ต่อเนื่องบน [a, b] พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f(x) จาก x = a ถึง x = b หมายถึง พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของ f แกน X เส้นตรง x = a และเส้นตรง x = b

ทฤษฎีบท กำหนดให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน [a, b] และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก x = a ถึง x = b จะหาได้จากสูตรต่อไปนี้

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง [a, b] แล้ว $A = \int_a^b f(x)dx$
2. ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง [a, b] แล้ว $A = -\int_a^b f(x)dx$

ตัวอย่างข้อสอบ

1. ถ้า $f'(x) = x^2 - 1$ และ $\int_0^1 f(x)dx = 0$ แล้ว $|f(1)|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + b\sqrt{x}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $b \neq 0$ ถ้า $2f'(1) = f(1)$ แล้ว $\frac{f(4)}{f'(9)}$ มีค่าเท่าใด

3. กำหนดให้ y = f(x) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่า**สูงสุด**ที่ x = 1 ถ้า $f''(x) = -4$ ทุก x และ f(−1) + f(3) = 0 แล้ว f มีค่า**สูงสุด**เท่าใด

4. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \to R$ และ $g : R \to R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = 3x^{2/3}$, $g(1) = 8$ และ $g'(1) = \frac{2}{3}$ ค่าของ $(fog)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) 1 4) $\frac{4}{3}$

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2} & , x < 2 \\ a - b & , x = 2 \\ x^2 + ax + 1 & , x > 2 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงแล้ว ค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f'(x) = 3\sqrt{x} + 5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ f(1) = 5 แล้วค่าของ $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x^2) - 2}{f(x)}$ เท่ากับเท่าใด

7. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f''(x) = 6x + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง y = f(x) ที่จุด (2, 19) เท่ากับ 19 แล้ว ค่าของ f(1) เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ f(x) = ax + b เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด และ $f(f(f(f(x)))) = 16x + 45$ แล้วค่าของ a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) −11 2) −5 3) 11 4) 5

9. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} & , -1 < x < 1 \\ ax + b & , 1 \le x < 5 \\ 5 & , x \ge 5 \end{cases}$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-1, \infty)$ แล้วค่าของ ab เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{5}{4}$ 2) $-\frac{7}{4}$ 3) 15 4) −10

10. กำหนดให้ f(x) เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง y = f(x) ที่จุด (1, 2) มีค่าเท่ากับ 4 และ $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 12$ แล้ว $f(-1) + f''(-1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

11. กำหนดให้ h(x) = f(x)g(x) โดยที่ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง y = f(x) ที่จุด (x, y) เท่ากับ 2 − 2x และเส้นโค้ง y = f(x) มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีสมบัติ $g(2) - g'(2) = 5$ แล้ว $h'(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 0.25 **2.** 12 **3.** 8 **4.** 2) **5.** 53
6. 6 **7.** 7 **8.** 1) **9.** 4) **10.** 18
11. 10