บทที่ 1
ความหมายของสัญลักษณ์ต่าง ๆ และความรู้เบื้องต้นทางคณิตศาสตร์

นักศึกษาที่เรียนวิชาสถิติเบื้องต้นนี้ ส่วนมากจะมีความรู้สึกว่าวิชานี้เกี่ยวข้องกับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักศึกษาจะต้องทราบและจำความหมายของสัญลักษณ์ต่าง ๆ และความรู้เบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ สำหรับสัญลักษณ์ต่าง ๆ และความหมาย นักศึกษาจะพบในหนังสือเล่มนี้ ส่วนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ นั้น นักศึกษาก็ได้เคยเรียนผ่านมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษา แต่อาจจะลืมไปแล้ว หรือบางคนอาจจะมีความรู้สึกว่ายังไม่เคยเรียนมาก่อน ในบทนี้จะมีเกร็ดความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาจำเป็นจะต้องนำไปใช้ในการเรียนวิชาสถิติเบื้องต้นนี้มาก ซึ่งนักศึกษาบางคนคิดว่าจำเป็นต้องทบทวน หรือนักศึกษาบางคนอาจจะไม่ต้องทบทวนก็ได้ถ้ายังไม่ลืม

1.1 ความหมายของสัญลักษณ์ต่าง ๆ

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\sqrt{\ }$	รากที่สองของ.....เช่น $\sqrt{16} = 4$
$\mid\ \mid$	ค่าสัมบูรณ์ของ.....เช่น $\mid -2 \mid = 2$
$=$	เท่ากับ
$<$	น้อยกว่า เช่น $6<9$
$\leqslant$	น้อยกว่า หรือเท่ากับ เช่น $x \leqslant 5$
$>$	มากกว่า เช่น $9>6$
$\geqslant$	มากกว่า หรือเท่ากับ เช่น $y \geqslant 3$
x_i	เทอมที่ i ของ Series หนึ่ง ๆ เช่น $\{2.3, 8.6, 1.3, 9.1, 7.9\}$, $x_2 = 8.6$
Σ	ผลบวกของ........

$\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sum_{i=1}^{5} X_i = X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$
	$\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = X_1^2+X_2^2+X_3^2$
$\bar{X}$	มัชฌิมเลขคณิตของตัวอย่าง
μ	มัชฌิมเลขคณิตของประชากร
a	มัชฌิมสมมติ
$\bar{X}_{me}$	มัธยฐานของตัวอย่าง
$\bar{X}_{mo}$	ฐานนิยมของตัวอย่าง
S^2	ความแปรปรวนของตัวอย่าง
σ^2	ความแปรปรวนของประชากร
S	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง
σ	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร
$S_{\bar{X}}$	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\bar{X}$) หรือ ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\bar{X}$)
N	จำนวนประชากร
n	ขนาดตัวอย่าง
f	ความถี่
d	เบี่ยงเบน
π	สัดส่วนของประชากร
P	สัดส่วนของตัวอย่าง
Q_1	ควอร์ไทล์ ที่ 1
Q_2	ควอร์ไทล์ ที่ 2
Q_3	ควอร์ไทล์ ที่ 3
Q_4	ควอร์ไทล์ ที่ 4
${}^{n}P_{r}$	การจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาเรียงคราวละ r สิ่ง
${}^{n}C_{r}$ หรือ $\binom{n}{r}$	การจัดกลุ่มของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดกลุ่มคราวละ r สิ่ง

$n!$	n แฟคตอเรียล = $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ เช่น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$\simeq$	มีค่าใกล้เคียงกับ...เช่น $P \simeq 0.05$
$\sim$	มีการกระจายเป็น...หรือมีการแจกแจงเป็น...เช่น $Z \sim N(0, 1)$
$f(x)$	ฟังก์ชั่น ความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X
θ	พารามิเตอร์ของประชากร
$\hat{\theta}$	พารามิเตอร์ของตัวประมาณค่า
H_0	สมมติฐานหลัก
H_a	สมมติฐานรอง
α	ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบหนึ่ง หรือ ระดับนัยสำคัญ
β	ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบสอง
$d.f.$ หรือ ν	องศาแห่งความเป็นอิสระ (Degree of freedom)
Z	การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 1
$Z_{\alpha/2}$	ค่าที่ได้จากตารางปกติมาตรฐานแล้วให้พื้นที่ปลายหางด้านขวามือ $= \alpha/2$
t	การแจกแจงแบบที
$t_{\alpha/2}$	คือค่าของการแจกแจงแบบที (เมื่อองศาความเป็นอิสระต่าง ๆ กัน) ที่ทำให้เหลือพื้นที่ปลายหางด้านขวามือเท่ากับ $\alpha/2$ เช่น $t_{.05}$ (เมื่อ $d.f. = 4$) $= 2.132$
χ^2	การแจกแจงแบบไคสแควร์
$\chi^2_{\alpha/2}$	ค่าที่เปิดจากตารางไคสแควร์ที่องศาความเป็นอิสระที่กำหนดให้ แล้วทำให้เหลือพื้นที่ที่นับจากปลายหางทางด้านขวามือจำนวน $\alpha/2$ เช่น $\chi^2_{.025}$ (เมื่อ $d.f. = 9$) มีค่าเท่ากับ 19.023
ρ	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากร
r	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง

1.2 เครื่องหมายแสดงผลบวก

เนื่องจากในวิชาสถิติ เรามักจะพบกับการบวกของคะแนนอยู่เสมอ การเขียนเพื่ออธิบายการบวกของหลาย ๆ เทอมทำให้เสียเวลา จึงได้มีผู้คิดให้สัญลักษณ์ที่แสดงให้ทราบถึงผลบวก โดยใช้สัญลักษณ์ Σ (อ่านว่า ซิกม่า) แทน ตัวอย่างเช่น

ให้ X_i เป็นความสูงของนักเรียน 5 คน หมายความว่านักเรียนจะมีความสูงเป็น X_1, X_2, X_3, X_4 และ X_5 ซึ่งถ้าจะหาผลรวมของความสูงของนักเรียนทั้ง 5 คน เราจะต้องหาผลบวกของ $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$ แทนที่เราจะเขียนผลบวกลักษณะเช่นนี้ เราอาจเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ Σ ได้ดังนี้ คือ

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 = \sum_{i=1}^{i=5} X_i \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

หรือในรูปทั่ว ๆ ไปเราจะเขียนได้เป็น

$$X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots+X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \ldots, N$$

ตัวอย่าง 1.2.1

มีเลขอยู่ชุดหนึ่ง คือ 1, 2, 3, 4, 5

จงหา $\sum_{i=1}^{5} X_i$

$$\therefore \sum_{i=1}^{5} X_i = 1+2+3+4+5 = 15$$

ตัวอย่าง 1.2.2

จากเลขชุดหนึ่ง คือ 1, 2, 3, 4, 5 จงหา $\sum_{i=1}^{5} X_i^2$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} X_i^2 &= 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \\ &= 1+4+9+16+25 \\ &= 55\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.3

จากเลข 1, 2, 3, 4, 5 จงหา $\sum_{i=2}^{4} X_i$

$$\sum_{i=2}^{4} X_i = 2+3+4 = 9$$

ตัวอย่าง 1.2.4

จากเลข 1, 2, 3, 4, 5 จงหา $\sum_{i=2}^{4} (X_i - 1)$

$$\sum_{i=2}^{4} (X_i - 1) = (2-1)+(3-1)+(4-1)$$

$$= 6$$

ตัวอย่าง 1.2.5

จากเลข 1, 2, 3, 4, 5 จงหา $\sum_{i=2}^{5} 3X_i$

$$\sum_{i=2}^{5} 3X_i = (3\times 2)+(3\times 3)+(3\times 4)+(3\times 5)$$

$$= 6+9+12+15$$

$$= 42$$

ซึ่งเขียนในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

ถ้ามี $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_N$

และ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - a) = (X_1 - a)+(X_2 - a)+(X_3 - a)+\ldots\ldots+(X_N - a)$$

ตัวอย่าง 1.2.6

ถ้ามีเลขอยู่ชุดหนึ่งคือ 1, 2, 3, 4, 5

จงหา $\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) - 1$

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = 1+2+3+4+5 = 15$$

$$\therefore \quad \left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) - 1 = 15 - 1 = 14$$

ตัวอย่าง 1.2.7

มีเลขอยู่ชุดหนึ่ง 1, 2, 3, 4, 5

จงหา $\sum_{i=1}^{5} (X_i+2)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} (X_i+2) &= (1+2)+(2+2)+(3+2)+(4+2)+(5+2) \\ &= 3+4+5+6+7 \\ &= 25\end{aligned}$$

$\therefore$ เขียนในรูปทั่ว ๆ ไปจะได้ดังนี้

ถ้ามี $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ โดยให้ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i+a) = (X_1+a)+(X_2+a)+\ldots,+(X_N+a)$$

ตัวอย่าง 1.2.8

มีเลขโดดอยู่ชุดหนึ่ง คือ 1, 2, 3, 4, 5

จงหา $\sum_{i=1}^{4} |X_i - 2|$

| | หมายถึง ค่าสัมบูรณ์ คือค่าที่เป็นตัวเลขโดยไม่คิดเครื่องหมาย

$$\begin{aligned}\therefore \quad \sum_{i=1}^{4} |X_i-2| &= |1-2|+|2-2|+|3-2|+|4-2| \\ &= 1+0+1+2 \\ &= 4\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.9

มีเลข 1, 2, 3, 4, 5 จงหา $\sum_{i=1}^{3}(X_i-1)^2$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(X_i-1)^2 &= (1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2 \\ &= 0+1+4 \\ &= 5\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.10 จากตาราง

i	X_i
1	8
2	2
3	3
4	6
5	7
6	8
7	9
8	4
9	5
10	4
11	1

จงหา

ก. $\sum_{i=1}^{2}X_i$

ข. $\sum_{i=2}^{4}X_i$

ค. $\sum_{i=7}^{11}X_i$

ง. $\sum_{i=1}^{i=11} X_i$

ก. $\sum_{i=1}^{2} X_i = 8+2 = 10$

ข. $\sum_{i=2}^{4} X_i = 2+3+6 = 11$

ค. $\sum_{i=7}^{11} X_i = 9+4+5+4+1 = 23$

ง. $\sum_{i=1}^{11} X_i = 8+2+3+6+7+8+9+4+5+4+1 = 57$

1.3 ทฤษฎีที่เกี่ยวกับการบวก

ทฤษฎีที่ 1

ผลบวกของค่าคงที่ใด ๆ N ต้องจะมีค่าเท่ากับ N เท่าของค่าคงที่นั้น นั่นคือ ถ้าให้ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ จะได้

$$\sum_{i=1}^{N} c = Nc$$

พิสูจน์ $\because$ $$\sum_{i=1}^{N} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{N \text{ ครั้ง}}$$

$$= Nc$$

ตัวอย่าง 1.3.1

จงหา $\sum_{i=1}^{3} 5$

$$\sum_{i=1}^{3} 5 = 5+5+5 = 15$$

หรือ $\sum_{i=1}^{3} 5 = 3\times(5) = 15$

ทฤษฎีที่ 2

ผลบวกของผลคูณระหว่างค่าคงที่กับตัวแปรใด ๆ จะมีค่าเท่ากับค่าคงที่นั้นคูณด้วยผลบวกของตัวแปรนั้น คือ

$$\sum_{i=1}^{N} cX_i = c\sum_{i=1}^{N} X_i$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} cX_i &= cX_1+cX_2+cX_3+\ldots+cX_N \\ &= c\,(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_N) \\ &= c\sum_{i=1}^{N} X_i\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3.2

จงหา $\sum_{i=1}^{4} 2X_i$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} 2X_i &= 2X_1+2X_2+2X_3+2X_4 \\ &= 2\,(X_1+X_2 2X_3+X_4) \\ &= 2\sum_{i=1}^{4} X_i\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 1.2.10 จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{4} 2X_i = 2\sum_{i=1}^{4} X_i = 2\times(8+2+3+6) = 2\times 19 = 38$$

ทฤษฎีที่ 3

ผลบวกของผลบวก (หรือผลต่าง) ของ 2 ตัวแปรขึ้นไปมีค่าเท่ากับผลบวก (หรือผลต่าง) ของแต่ละตัวแปรรวมกัน ดังนี้คือ

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i+Y_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i-Y_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i+Y_i) = (X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)+\ldots+(X_N+Y_N)$$
$$= (X_1+X_2+\ldots+X_N)+(Y_1+Y_2+\ldots+Y_N)$$
$$= \sum_{i=1}^{N}X_i+\sum_{i=1}^{N}Y_i$$

พิสูจน์

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i-Y_i) = (X_1-Y_1)+(X_2-Y_2)+\ldots+(X_N-Y_N)$$
$$= (X_1+X_2+\ldots+X_N)-(Y_1+Y_2+\ldots Y_N)$$
$$= \sum_{i=1}^{N}X_i-\sum_{i=1}^{N}Y_i$$

ตัวอย่าง 1.3.3

	X_i	Y_i	(X_i-Y_i)
	8	5	3
	3	2	1
	4	0	4
	5	4	1
ผลรวม	20	11	9

$$\sum_{i=1}^{4}(X_i-Y_i) = \sum_{i=1}^{4}X_i-\sum_{i=1}^{4}Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{4}X_i = 20$$

$$\sum_{i=1}^{4}Y_i = 11$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{4}(X_i-Y_i) = 20-11 = 9$$

$$\sum_{i=1}^{4}(X_i^2+Y_i) = \sum_{i=1}^{4}X_i^2 + \sum_{i=1}^{4}Y_i$$

$$\because \quad \sum_{i=1}^{4}X_i^2 = (64+9+16+25) = 114$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{4}(X_i^2+Y_i) = 114+11 = 125$$

ตัวอย่างที่ 1.3.4

จากโจทย์ตัวอย่าง 1.3.3 จงหา $\sum_{i=1}^{3}(X_i^2+aX_i+5)$

$$\begin{aligned}
\because \quad \sum_{i=1}^{3}(X_i^2+aX_i+5) &= \sum_{i=1}^{3}X_i^2+\sum_{i=1}^{3}aX_i+\sum_{i=1}^{3}5 \\
&= \sum_{i=1}^{3}X_i^2+a\sum_{i=1}^{3}X_i+3(5) \\
&= (64+9+16)+a(8+3+4)+15 \\
&= 89+15a+15 \\
&= 15a+104
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3.5

ถ้า $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{N}$ จงพิสูจน์ว่า

ก. $\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{N}X_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)^2}{N}$

ข. $\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}) = \sum_{i=1}^{N}X_iY_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i\right)}{N}$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\text{ก.} \quad \sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^{N}(X_i^2-2\bar{X}X_i+\bar{X}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{N}X_i^2-2\bar{X}\sum_{i=1}^{N}X_i+N\bar{X}^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2\left(\frac{\sum_{i=1} X_i}{N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) + N\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}{N}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}{N}$$

ข. $$\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{N}(X_iY_i-\overline{X}Y_i-\overline{Y}X_i+\overline{X}\overline{Y})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_iY_i-\overline{X}\sum_{i=1}^{N} Y_i-\overline{Y}\sum_{i=1}^{N} X_i+N\overline{X}\overline{Y}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_iY_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i \sum_{i=1}^{N} X_i}{N} + N\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{N\times N}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_iY_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{N}$$

1.4 ทศนิยม (Decimals)

การบวกและการลบ

เมื่อจะบวกหรือลบทศนิยม ควรจัดให้ "จุดทศนิยมตรงกัน" แล้วบวก หรือลบกันเหมือนเลขจำนวนเต็มธรรมดา จำนวนที่ทดจะทดข้ามจุดทศนิยม คือทดไปให้จำนวนเต็มที่อยู่หน้าจุดทศนิยมได้ และการลบที่ต้องขอยืมจะขอยืมจากจำนวนเต็มที่อยู่หน้าจุดทศนิยมได้

ตัวอย่างที่ 1.4.1

จงบวก 3.094, 235.67 และ 45.7

วิธีทำ จัดทศนิยมให้ตรงกัน แล้วจึงบวกกัน

$$\begin{array}{r} 3.094 \\ 235.67 \\ \underline{45.7} \\ \underline{\underline{284.464}} \end{array}$$

การคูณหารทศนิยม

การคูณ

ถ้าตัวคูณเป็นเลขจำนวนเต็ม ก็ให้คูณเหมือนเลขจำนวนเต็ม แล้วใส่จุดทศนิยมที่ผลลัพธ์ให้มีจำนวนตำแหน่งเท่ากับตัวตั้ง ถ้าทั้งตัวตั้งและตัวคูณต่างก็เป็นทศนิยมให้ตั้งคูณกันได้ทันทีโดยไม่จำเป็นต้องตั้งจุดให้ตรงกัน แต่ต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์ ให้ตำแหน่งทศนิยมเท่ากับผลบวกของจำนวนตำแหน่งทศนิยมของตัวตั้งและตัวคูณ เช่น ตัวตั้งเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง ตัวคูณเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่ง ผลลัพธ์จะต้องเป็นทศนิยม 6 ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 1.4.2

$$\begin{array}{r} 1.072 \\ \underline{.02} \\ \underline{\underline{.02144}} \end{array} \times \qquad \begin{array}{r} .00007 \\ \underline{.2} \\ \underline{\underline{.000014}} \end{array} \times \qquad \begin{array}{r} 1.2 \\ \underline{1.2} \\ \underline{\underline{1.44}} \end{array} \times$$

การหาร

เมื่อตัวหารเป็นเลขจำนวนเต็ม ก็หารกันได้ทันที เหมือนหารเลขธรรมดา เพียงแต่ใส่จุดทศนิยมให้ตรงกับจุดทศนิยมของตัวตั้ง และถ้าหารไม่ลงตัวก็ให้เติมศูนย์ต่อท้ายลงไปแล้วจึงหารต่อไป ถ้ายังไม่ลงตัวก็ให้เติมศูนย์เพิ่มอีกกี่ตัวก็ได้จนกว่าจะหารลงตัว หรือถ้าโจทย์กำหนดว่าต้องการกี่ตำแหน่งก็ทำให้ได้ตามที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่างที่ 1.4.8

$$\frac{.012}{.3} = .04$$

$$\frac{2.0648}{.2} = 10.324$$

$$\frac{.008}{8} = .001$$

$$\frac{8.721}{15} = 0.5814$$

1.5 จำนวนเต็มลบ

จำนวนเต็มลบเกิดขึ้นเมื่อตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ เช่น

$$2-4 = -2$$

$2-4$ คือจำนวนเลขจำนวนหนึ่งซึ่งเมื่อบวกกับ 4 แล้วได้ผลเท่ากับ 2 นั่นคือ -2

การบวก

ในการบวกเลขจำนวนที่เป็นลบทั้งหมด ให้บวกเป็นเลขจำนวนเต็มบวกธรรมดา ได้ผลลัพธ์เท่าไร แล้วให้ใส่เครื่องหมายลบไว้ข้างหน้าผลลัพธ์ที่ได้*

ตัวอย่าง 1.5.1

$$\begin{array}{r} -6 \\ -8 \; + \\ \underline{-12} \\ \underline{\underline{-26}} \end{array}$$

ถ้ามีทั้งเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบปนกัน เช่น ถ้ามีเลขอยู่ 2 จำนวน จำนวนหนึ่งเป็นบวก อีกจำนวนหนึ่งเป็นลบ ให้นำเลขจำนวนที่น้อยไปลบออกจากเลขจำนวนที่มาก (โดยไม่คิดเครื่องหมาย) ได้เท่าไรให้ใส่เครื่องหมายของจำนวนเลขที่มากกว่า

ตัวอย่าง 1.5.2

$$\begin{array}{r} -6 \\ +8 \\ \hline +2 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -22 \\ +28 \\ \hline +6 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} +56 \\ -72 \\ \hline -16 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} +19 \\ -30 \\ \hline -11 \\ \hline\hline \end{array}$$

ถ้ามีมากกว่า 2 จำนวนขึ้นไป และมีทั้งเครื่องหมายบวกและลบปนกัน ให้รวมเลขที่มีเครื่องหมายเหมือนกันไว้ด้วยกัน แล้วจึงนำมาบวกกันตามตัวอย่าง 1.5.2

ตัวอย่าง 1.5.3

-4 เลขที่มีเครื่องหมายบวกรวมกันได้

-7 $\quad +8+13 = +21$

8 เลขที่มีเครื่องหมายลบรวมกันได้

13 $\quad -4-7-12-5 = -28$

-12 $\quad \therefore$

-5

$$\begin{array}{r} +21 \\ -28 \\ \hline -7 \\ \hline\hline \end{array}$$

การลบ

การลบจำนวนเต็มลบจากเลขจำนวนอื่น ๆ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงข้าม และทำตามวิธีการบวกข้างต้น

ตัวอย่าง 1.5.4

$$\begin{aligned} 12-(-8) &= 12+8 \\ &= 20 \\ -22-(-8) &= -22+8 \\ &= -14 \end{aligned}$$

การคูณ

เมื่อเลข 2 จำนวนมีเครื่องหมายเหมือนกัน อาจจะเป็นบวกทั้งคู่ หรือลบทั้งคู่ ผลคูณของเลข 2 จำนวนนั้นจะเป็นบวก

เมื่อเลข 2 จำนวนมีเครื่องหมายต่างกัน คือจำนวนหนึ่งเป็นบวกอีกจำนวนหนึ่งเป็นลบ ผลคูณของเลข 2 จำนวนนั้นจะเป็นลบ

ตัวอย่าง 1.5.5

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \\ \times\ -2 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times\ -2 \\ \hline -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \\ \times\ \ 2 \\ \hline -12 \end{array}$$

การหาร

เหมือนกับการคูณ

ตัวอย่าง 1.5.6

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad , \qquad \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\frac{6}{-2} = -3 \qquad , \qquad \frac{-6}{2} = -3$$

1.6 ลอการิทึม (Logarithm)

ถ้า $a^x = N$

$x = \log_a N$ อ่านว่า log ของ N ฐาน a

และถ้ากำหนดให้

$\log_b P = q$

หมายความว่า $b^q = P$

ตัวอย่าง 1.6.1

$$10^2 = 100$$

$$\therefore \quad 2 = \log_{10} 100$$

เนื่องจากฐาน 10 เป็นมาตรฐาน อาจเขียน log เฉย ๆ ก็ได้

$$\therefore \quad \log 100 = 2$$

$$\log 1000 = 3$$

ถ้าต้องการทราบ log 156

จะเห็นได้ว่า log 100 = 2 และ

$$\log 1000 = 3$$

$\therefore$ 156 อยู่ระหว่าง 100 กับ 1000 ดังนั้น log 156 จะต้องมีค่าเท่ากับ 2 กว่า ๆ แต่ไม่ถึง 3 จึงได้มีผู้คิดสร้างตารางของ log ฐาน 10 ขึ้นมา โดยสร้างแต่ตัวเลขทศนิยม (เรียกว่า mantissa) ส่วนเลขจำนวนเต็ม (เรียกว่า characteristic) นั้นให้ผู้ใช้ตารางคิดเอาเอง

$\therefore$ เลขจำนวนเหมือนกัน แต่จุดทศนิยมอยู่ต่างตำแหน่งกันจะมี characteristic ต่างกัน แต่ mantissa เป็นจำนวนเดียวกัน เช่น

$$\log 196.2 = 2.292699$$

$$\log .001962 = \bar{3}.292699 \text{ (โดยที่ } \bar{3} = -3)$$

คุณสมบัติของลอกการิทึม

1. log ของผลคูณของเลขหลายจำนวนจะมีค่าเท่ากับผลบวกของ log ของเลขแต่ละจำนวน

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

2. log ของผลหารของเลขหลายจำนวนจะมีค่าเท่ากับผลต่างของ log ของตัวตั้งกับ log ของตัวหาร

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

1.7 สิ่งที่ไม่เท่ากัน (Inequalities)

สัญลักษณ์ < และ > หมายถึง "น้อยกว่า" และ "มากกว่า" ตามลำดับ

เช่น $3 < 5$ อ่านว่า 3 น้อยกว่า 5

$5 > 3$ อ่านว่า 5 น้อยกว่า 3

$x < 8$ อ่านว่า x น้อยกว่า 8

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า inequalities เกิดขึ้นเมื่อมีการเปรียบเทียบจำนวนมากน้อยต่อกัน และการเปรียบเทียบนี้จะมีขึ้นได้ก็ต่อเมื่อจำนวนที่นำมาเปรียบเทียบเป็นจำนวนจริง (real numbers) ซึ่งได้แก่ จำนวนเต็ม เศษส่วน และพวกทศนิยมไม่ซ้ำกัน ดังนั้น ถ้า a และ b เป็น real number a จะมากกว่า b เมื่อ $a-b$ มีค่าเป็นบวก นั่นคือ

$a > b$ เมื่อ $a-b > 0$

จำนวนบวกเป็นจำนวนที่มากกว่า 0 เพราะเมื่อเอา 0 ไปลบจะได้ค่าเป็นบวก จำนวนลบเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 0 เพราะเมื่อเอา 0 ไปลบจะได้ค่าเป็นลบ

$\therefore\ a > 0$	เมื่อ a มีค่าบวก
$a < 0$	เมื่อ a มีค่าลบ
$2 > -3$	เพราะ $2-(-3) = 5$
$-2 > -3$	เพราะ $-2-(-3) = 1$
$a < b$	เมื่อ $a-b < 0$
$4 < 6$	เมื่อ $4-6 = -2 < 0$
$-10 < -7$	เมื่อ $-10-(-7) = -3 < 0$

สิ่งที่ควรทราบ

1. ถ้า a, b และ c เป็น real number และ $c > 0$ ถ้า $a > b$ จะได้

$a+c > b+c$

$a-c > b-c$

$ac > bc$

$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

ถ้า $a+c > b$

เอา $-c$ บวกทั้ง 2 ข้าง จะได้

$a > b-c$

ถ้า $ac > b$

เอา c หารทั้ง 2 ข้าง จะได้

$a > \frac{b}{c}$

ถ้า $\frac{a}{c} > b$

เอา c คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$a > bc$

และถ้า $a > b$ จะได้

$-a < -b$

2. ถ้า a, b และ c เป็น real munber และ $c < 0$ (c เป็นลบ)

ถ้า $a > b$ จะได้ $a+c > b+c$, $a-c > b-c$

แต่ $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

3. ถ้า $a > b > 0$ และ $c > d > 0$

$a+c > b+a$ และ

$ac > bd$

แต่ไม่แน่ว่า $a-c$ จะ $> b-d$

สรุป ถ้าหาก inequalities มีเครื่องหมายเหมือนกัน การรวมกัน หรือคูณกัน ไม่ทำให้เครื่องหมายเปลี่ยนแปลง

1.8 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Values)

นิยาม

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x, & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

คุณสมบัติทั่วไป

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ ถ้า $x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $-|x| \leqslant |x|$
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

1.9 การถอดกรณฑ์ที่ 2 (การหารากที่ 2)

มีวิธีดังนี้

การหารากที่ 2 ของเลขจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากที่ 2 ของ 390625

$$\begin{array}{r|l} & \;\;6\;\;2\;\;5 \\ \hline 6 & 39,06,25 \\ & \underline{36} \\ 122 & \;\;3\;06 \\ & \;\;\underline{2\;44} \\ 1245 & \;\;\;\;62\;25 \\ & \;\;\;\;\underline{\underline{62\;25}} \end{array}$$

$\therefore$ รากที่ 2 ของ 390625 คือ ± 625

คำอธิบาย

วิธีทำ

ขั้นที่ 1) ให้แบ่งเลขจำนวนนั้นทีละ 2 หลักจากขวาไปซ้ายด้วยเครื่องหมาย, (กลุ่มซ้ายสุดอาจมี 1 หลักก็ได้ ถ้าเลขจำนวนนั้นมีจำนวนหลักเป็นเลขคี่

จากตัวอย่างที่ 1

1) 39,06,25

ขั้นที่ 2) หาเลข 1 หลัก (1-9) ให้เป็นตัวหารและผลลัพธ์ x โดยที่ $x^2 \leqslant$ เลขในกลุ่มซ้ายสุด (ตัวตั้ง) ต้อง close ด้วย - ถ้า x^2 = เลขตัวตั้ง ให้ดึงเลข 2 หลักถัดไปลงมาเป็นตัวตั้งตัวต่อไป - ถ้า x^2 < เลขตัวตั้ง ให้หาผลต่างแล้วดึงเลข 2 หลักถัดไปลงมาไว้กับผลต่าง เพื่อเป็นตัวตั้งตัวต่อไป	2) $x = 6$ โดยที่ $6^2 = 36 < 39$ ใส่ 6 ไว้ที่ตัวหารและเหนือเลข 9 ที่ผลลัพธ์ ผลต่างระหว่าง 39 และ 36 = 3 ดึง 06 ลงมา ดังนั้นตัวตั้งใหม่คือ 306
ขั้นที่ 3) เอา 2 คูณผลลัพธ์ในขั้นก่อน (คือ x) สมมติเท่ากับ y ใส่ไว้ที่ตัวหารแล้วหาเลข 1 หลัก (0-9) ให้เป็น z ใส่ไว้ทางขวาของ y โดยที่ผลคูณของ yz และ z ต้องไม่เกินตัวตั้งในขั้นก่อน และใส่ z ไว้ที่ผลลัพธ์ด้วย หาผลต่างของตัวตั้งในขั้นก่อนกับ (ผลคูณของ yz และ z) ดึงเลข 2 หลักถัดไปลงมาไว้กับผลต่างเพื่อเป็นตัวตั้งตัวต่อไป	3) $y = 2x = 2x6 = 12$ $z = 2$ โดยที่ $122 \times 2 = 244 < 306$ ผลต่างของ 306 และ 244 = 62 ดึง 25 ลงมา ตัวตั้งตัวใหม่คือ 6225
ขั้นที่ 4) ทำซ้ำขั้นที่ 3 กับตัวตั้งตัวใหม่ โดยที่ x คือผลลัพธ์ตัวใหม่	4) ผลลัพธ์ใหม่คือ 62 = x $2 \times 62 = 124$ $z = 5$ โดยที่ $1245 \times 5 = 6225$ ซึ่งเท่ากับ 6225 (ตัวตั้งตัวใหม่จากขั้นที่ 3) ดังนั้นรากที่ 2 ของ 396025 (รากบวก) คือ 625

หมายเหตุ ในกรณีที่รากของเลขจำนวนหนึ่งไม่เป็นจำนวนเต็มให้ทำซ้ำขั้น 3 โดยดึง 00 (2 ศูนย์) ลงมาไว้กับผลต่างเพื่อเป็นตัวตั้งตัวต่อ ๆ ไป ทำไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้จำนวนทศนิยมตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 2 จงหารากที่ 2 ของ 390623

	6 2 4. 9 9 8
6	39,06,23.00,00,00
	36
122	3 06
	2 44
1244	62 23
	49 76
12489	12 47 00
	11 24 01
6249 × 2 = 12498 9	1 22 99 00
	1 12 49 01
62499 × 2=124998 8	10 49 99 00
	9 99 99 04
	49 99 96
	⋮

การหารากที่ 2 ของเลขทศนิยม

ตัวอย่างที่ 3 จงหารากที่ 2 ของ .390625

	. 6 2 5
6	.39,06,25
	36
122	3 06
	2 44
1245	62 25
	62 25

∴ รากที่ 2 ของ .390625 คือ ±.625

ตัวอย่างที่ 4 จงหารากที่ 2 ของ .060025

	. 2 4 5
2	.06,00,25
	4
44	2 00
	1 76
485	24 25
	24 25

$\therefore$ รากที่ 2 ของ .060025 คือ $\pm .245$

คำอธิบายวิธีทำ	**จากตัวอย่างที่ 4**
ขั้นที่ 1) ให้แบ่งเลขทศนิยมจำนวนนั้นทีละ 2 หลัก โดยเริ่มจากจุดทศนิยม	1) .06,00,25
ขั้นที่ 2) หาเลข 1 หลัก (1-9) ให้เป็น x (ตัวหารและผลลัพธ์) โดยที่ $x \leqslant$ เลขในกลุ่มซ้ายสุด (ตัวตั้ง)	2) $x = 2$ โดยที่ $2^2 = 4 < 06$ ใส่ 2 ไว้ที่ตัวหารและ .2 ที่ผลลัพธ์ โดยให้เลข 2 ตรงกับเลข 6
- ถ้า x^2 = เลขตัวตั้ง ให้ดึงเลข 2 ตัว ถัดไปลงมาเป็นตัวตั้งตัวต่อไป	
- ถ้า $x^2 <$ เลขตัวตั้ง ให้หาผลต่างแล้วดึงเลข 2 ตัว ถัดไปลงมาไว้กับผลต่าง เพื่อเป็นตัวตั้งตัวต่อไป	ผลต่างระหว่าง 06 และ 4 คือ 2 2 ดึง 00 ลงมา ดังนั้น ตัวตั้งตัวใหม่ คือ 200
ขั้นที่ 3) เอา 2 คูณผลลัพธ์ในขั้นก่อน (คือ x) สมมติเท่ากับ y ใส่ไว้ที่ตัวหาร แล้วหาเลข 1 หลัก (0-9) ให้เป็น z ใส่ไว้ทางขวาของ y โดยที่ผลคูณของ yz และ z ต้องไม่เกินตัวตั้งในขั้นก่อน และใส่ z ไว้ที่ผลลัพธ์ด้วย หาผลต่างของตัวตั้งในขั้นก่อนกับผลคูณของ yz และ z	3) $y = 2x = 2 \times 2 = 4$ $z = 4$ โดยที่ $44 \times 4 = 176 < 200$ ใส่ 4 ไว้เหนือเลข 0 ตัวขวา ผลต่างของ 200 และ 176 คือ 24 ดึง 25 ลงมา ตัวตั้งตัวใหม่คือ 2425

ดึงเลข 2 ตัวถัดไป ลงมาไว้กับผลต่างเพื่อเป็นตัวตั้งตัวต่อไป	
ขั้นที่ 4) ทำซ้ำขั้นที่ 3 กับตัวตั้งตัวใหม่โดยที่ x คือผลลัพธ์ตัวใหม่	4) ผลลัพธ์ใหม่คือ 24 = x $2 \times 24 = 48$ z = 5 โดยที่ $485 \times 5 = 2425$ ซึ่งเท่ากับตัวตั้งตัวใหม่จากขั้นที่ 3 ดังนั้นรากที่ 2 ของ .060025 คือ .245 (รากบวก)