บทที่ 4
Exposure formulas ที่ขึ้นอยู่กับข้อมูลของแต่ละบุคคล

4.1 ระยะเวลาในการศึกษาอัตรามรณะและรายการเบื้องต้น (Observation periods and basic categories)

ระยะเวลาในการศึกษาอัตรามรณะ เราเรียกว่า "observation period" ตัวอย่างเช่น observation period เริ่มจาก 1 กรกฎาคม 2520 ถึง 30 มิถุนายน 2525 บริษัทประกันชีวิตมักจะทำการศึกษา โดยเริ่มจากวันครบปีกรมธรรม์ประกันภัย ถึงวันครบรอบปีกรมธรรม์ประกันภัยที่เรียกว่า anniversary-to-anniversary และรายการเบื้องต้นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณจะมีเพียง 5 รายการ คือ Starters (S_x), Newentrants (N_x), Withdrawals (W_x), Enders (e_x) และ Deaths (θ_x) ตัวอย่างเช่น ถ้า observation period เริ่มจากวันครบรอบกรมธรรม์ในปี 2520 ถึงวันครบรอบปีกรมธรรม์ในปี 2523 จะได้ว่า

1. กรมธรรม์ที่เริ่มประกันก่อนปี 2520 จะอยู่ในกลุ่มที่ทำการศึกษาต่อเมื่อกรมธรรม์นั้น ๆ ยังมีผลบังคับใช้อยู่ในวันครบรอบปีกรมธรรม์ในปี 2520

2. กรมธรรม์ที่เริ่มประกันระหว่างปี 2520, 2521 และ 2522 จะอยู่ในกลุ่มที่เราทำการศึกษา

3. กรมธรรม์ที่นอกเหนือจากนี้จะไม่อยู่ในกลุ่มที่ทำการศึกษา

4. กรมธรรม์ใด ๆ ในข้อ (1) เราเรียกว่า Starters เช่น กรมธรรม์ที่เริ่มเมื่อ 3 มิถุนายน 2505 เราจะทำการศึกษาเมื่อ 3 มิถุนายน 2520

5. กรมธรรม์ใด ๆ ในข้อ (2) มีชื่อเรียกว่า New entrants

$\therefore$ กรมธรรม์ทั้งหมดที่เราทำการศึกษา (T) = Starters + New entrants

6. กรมธรรม์ T กรมธรรม์นี้จะมีบางกรมธรรม์ที่ผู้เอาประกันตายก่อนวันครบรอบปีกรมธรรม์ในปี 2523 และมีบทกรมธรรม์ที่ยกเลิกจากการสังเกต มีบางกรมธรรม์อาจจะขอยกเลิกหรือมีบทกรมธรรม์ที่ครบกำหนดสัญญาในระหว่างที่ทำการศึกษากรมธรรม์เหล่านี้เราเรียกว่า "Withdrawals" และจะมีบางกรมธรรม์ที่เหลืออยู่ในวันครบรอบปีกรมธรรม์ในปี 2523 เราเรียกว่า Enders

$\therefore$ T = Deaths + Withdrawals + Enders

ตัวอย่างเช่น ถ้าระยะเวลาในการศึกษาอัตรามรณะเริ่มจาก Jan 1, 1950 ถึง Sept 30, 1955 และมี individual records ให้ดังตารางข้างล่าง จงเติมช่องว่างในตารางให้สมบูรณ์ (เติมข้อความในช่องที่ 3, 4 และ 5)

ลูกจ้างคนที่ (1)	ข้อมูล (2)	Include หรือ Exclude (3)	การวัด exposures	
			เริ่มต้นเมื่อ (4)	สิ้นสุดเมื่อ (5)
1	ว่าจ้างเมื่อ 2/3/48 ออกเมื่อ 1/7/49	E	–	–
2	ว่าจ้างเมื่อ 4/6/49 ออกเมื่อ 11/1/54	I	Jan I. 1950	11/1/54
3	ว่าจ้างเมื่อ 3/7/45 ไม่ได้ค่าจ้างเมื่อ 10/21/56	I	Jan 1, 1950	Sept 30, 1955
4	ว่าจ้างเมื่อ 3/7/45 ยังคงทำต่อไปเรื่อย ๆ	I	Jan I. 1950	Sept 30, 1955
5	ว่าจ้างเมื่อ 5/3/52 ออกเมื่อ 6/7/55	I	5/3/52	6/7/55
6	ว่าจ้างเมื่อ 4/1/53 ยังคงทำต่อไปเรื่อย ๆ	I	4/1/53	Sept 30, 1955
7	ว่าจ้างเมื่อ 10/15/55 ยังคงทำงานต่อไปเรื่อย ๆ	E		
8	ว่าจ้างเมื่อ 9/1/55 ออกเมื่อ 12/31/55	E	–	
9	ว่าจ้างเมื่อ 1/1/48 ตายเมื่อ 12/30/49	*E*		

4.2 Seriatim หรือ Scoreboard Method

ตัวอย่างเช่น observation period เริ่มจาก Jan 1, 1955 ถึง June 30, 1959 และกำหนดข้อมูลต่อไปนี้ให้

ลูกจ้างคนที่	วันเดือนปีเกิด	วันเดือนปีที่ว่าจ้าง	ข้อมูลอื่น ๆ
1	Apr. 1, 1905	Jan 1, 1953	Died July 1, 1957
2	July 1, 1906	July 1, 1957	Quit Jan 1, 1959
3	Oct 1, 1906	Jan 1, 1958	In service June 30, 1959
4	Jan 1, 1905	Apr 1, 1950	In service June 30, 1959
5	Apr. 1, 1907	Jan 1, 1959	In service June 30, 1959
6	Jan 1, 1905	Apr 1, 1959	Died June 1, 1959
7	May 1, 1905	Feb 1, 1960	Quit Jan 1, 1967

จากข้อมูลในตารางดังกล่าวเราเตรียมการทำงาน (Worksheet) ได้ดังนี้

ลูกจ้างคนที่	On the risk		off the risk	
	Group	Age on	Group	Age off
1	Starter	49.75	Death	52.25
2	New entrant	51.00	Withdrawal	52.50
3	New entrant	51.25	Ender	52.75
4	Starter	50.00	Ender	54.50
5	New entrant	50.75	Ender	52.25
6	New entrant	54.25	Death	54.50
7	Exclude	because	hired after	ending date of observation

เราต้องการหา exposure ที่สัมพันธ์กับ q_x เมื่อ x เป็นอายุที่เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นเราต้องสร้างหลักที่อายุที่เป็นเลขจำนวนเต็ม และถือว่าความตายเกิดขึ้นที่อายุสุดท้ายที่เป็นเลขจำนวนเต็ม เราก็สามารถที่จะคำนวณหา exposure ที่สัมพันธ์กับ q_x โดยใช้สมมติฐานของ Balducci ที่ว่า $1-{}_tq_{x+t} = (1-t)\cdot q_x$ จะได้ exposure สำหรับอายุต่าง ๆ ดังนี้

อายุ	49–50	50–51	51–52	52–53	53–54	54–55
กรณีที่ 1	.25	1.00	1.00	1.00		
2			1.00	.50		
3			.75	.75		
4		1.00	1.00	1.00	1.00	.50
5		.25	1.00	.25		
6						.75
รวม	.25	2.25	4.75	3.50	1.00	1.25

4.3 Group Methods

ในการศึกษาอัตรามรณะอายุที่เข้ากับอายุที่ออกอาจจะไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม คือ อายุอาจจะมีเศษเป็นครึ่งปี ดังนั้นเราจะต้องปรับปรุงการเข้าและการออกก่อนที่จะใช้ group method ค่าของ exposure ที่คำนวณได้โดย group method อาจจะไม่ตรงกับค่า exposure ที่คำนวณได้โดย Seriatim method แต่ก็จะได้ค่าออกมาใกล้เคียงกัน

พิจารณาค่า q_x ดังต่อไปนี้ เช่น

$$q_{20} = \frac{2}{1000}$$

$$q_{35} = \frac{5}{1000}$$

$$q_{80} = \frac{60}{1000}$$

จะเห็นได้ว่า จำนวนคนตายซึ่งเป็นตัวเศษจะน้อยกว่าจำนวน exposure ซึ่งเป็นตัวส่วนอย่างมาก ถ้าจำนวนคนตายนับผิดไปเพียงเล็กน้อย จะทำให้อัตรามรณะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปมาก ดังนั้น จำนวนคนตายที่สังเกตได้จะต้องมีค่าถูกต้อง ส่วนค่าของ exposure นั้นเราใช้ประมาณได้ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

การนับจำนวนคนตายให้ถูกต้องนั้น จะใช้วิธีแบ่งอายุออกเป็นหน่วย คือ

1. Age next birthday เป็นการนับจำนวนคนตายตามอายุของวันเกิดครั้งต่อไป

ถ้าเราให้ θ_x แทนจำนวนคนตายอายุ x ที่ตายไป สัญญลักษณ์ที่เขียนแทนการนับจำนวนคนตายตาม Age next birthday จะใช้ $\theta_x \Big]_{x-1}^{x}$ เช่น $\theta_{25} \Big|_{25-1}^{25}$ ซึ่งหมายถึงเรานับจำนวนคนตายจากอายุ 24 ปี ถึงอายุ 25 ปี และเราต้องสร้างหลัก ณ อายุที่เป็นเลขจำนวนเต็ม

2. Age nearest birthday เป็นการนับจำนวนคนตายตามอายุที่ใกล้วันเกิด สัญญลักษณ์ที่เขียนแทนการนับจำนวนคนตายตาม Age nearest birthday คือ $\theta_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$ ซึ่งหมายถึง

เรานับจำนวนคนตายจากอายุ $x - \frac{1}{2}$ ถึงอายุ $x + \frac{1}{2}$ เช่น $\theta_{30} \Big]_{29\frac{1}{2}}^{30\frac{1}{2}}$ ซึ่ง θ_{30} จะเป็นจำนวนคนตายระหว่างอายุ $29\frac{1}{2}$ กับ $30\frac{1}{2}$ และต้องสร้างหลัก ณ อายุที่เป็นเศษครึ่งหนึ่ง เช่น $25\frac{1}{2}$, $27\frac{1}{2}$, $30\frac{1}{2}$ เป็นต้น

3. Age last birthday เป็นการนับจำนวนคนตายตามอายุของวันเกิดครั้งสุดท้าย สัญญลักษณ์ที่ใช้คือ $\theta_x \Big|_x^{x+1}$ หมายถึงจำนวนคนตายระหว่างอายุ x ถึงอายุ $x + 1$ เช่น $\theta_{28} \Big|_{28}^{29}$ โดยที่ θ_{28} เป็นจำนวนคนตายระหว่างอายุ 28 กับ 29 และต้องสร้างหลัก ณ อายุที่เป็นเลขจำนวนเต็ม

การนับจำนวน exposure นั้น เราจะต้องนับ exposure ตามวิธีการนับจำนวนคนตาย เช่น ถ้าจำนวนคนตายนับโดยใช้ Age nearest birthday การนับ exposure ก็จะต้องนับโดยใช้ Age nearest birthday ด้วย และตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นว่า ความผิดพลาดเล็กน้อยที่เกิดจากการนับ exposure ของแต่ละอายุมีผลกระทบกระเทือนต่ออัตรามรณะน้อยมาก และเราสามารถประมาณ exposure ได้โดยใช้หลักเกณฑ์ในการประมาณดังต่อไปนี้ คือ

ก. จะต้องไม่ประมาณ exposure สูงขึ้นหรือต่ำลงตลอดเวลา

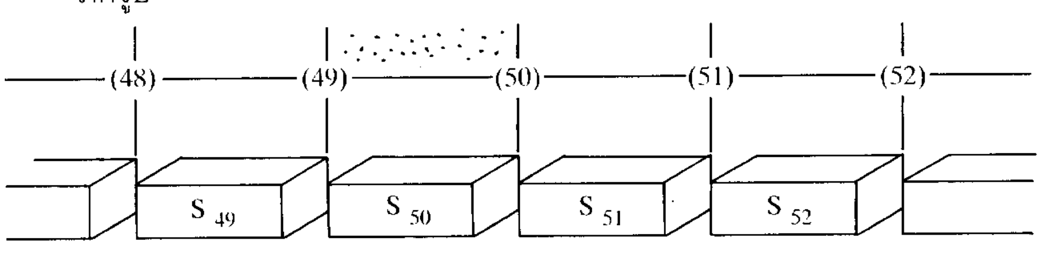
ข. ความผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณ exposure จะต้องไม่สะสมขึ้นถ้าคำนวณจากช่วงหนึ่งไปยังอีกช่วงหนึ่ง

ค. ค่า exposure ที่ได้ไม่จำเป็นจะต้องถูกต้องสำหรับชีวิตหนึ่งชีวิตใด แต่การที่ได้ค่า exposure เกินความเป็นจริงจากคนกลุ่มหนึ่ง อาจจะนำไปหักล้างกับค่า exposure ที่ต่ำกว่าความเป็นจริงของคนอีกกลุ่มหนึ่งได้

ง. วิธีการประมาณ exposure จะต้องมีการหักล้างกัน นักคณิตศาสตร์ประกันภัยแต่ละคนอาจเลือกวิธีการประมาณแตกต่างกัน แต่เมื่อคำนวณออกมาแล้ว ค่า exposure ที่ได้จะได้ค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้น การเลือกวิธีประมาณ exposure เขาจะพิจารณาถึงความสะดวกและความประหยัดในเรื่องเวลาและแรงงานที่ใช้

4.4 Approximation Methods

จากรูป



กำหนดให้ : Deaths นับตาม Age next birthday, $\theta_x \Big]_{x-1}^{x}$

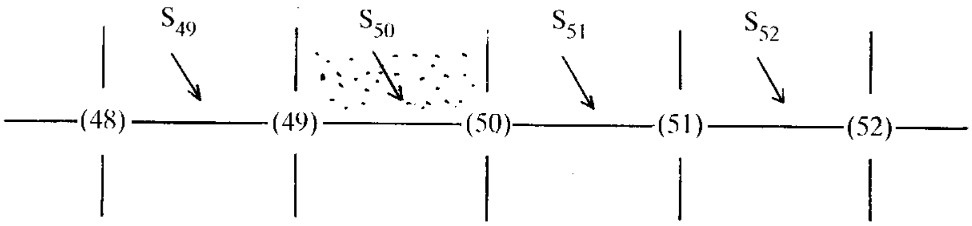
Starters นับตาม Age next birthday, $S_x \Big]_{x-1}^{x}$

ถ้าเราพิจารณา unit interval ระหว่างอายุ 49 กับอายุ 50 (ช่วงที่แรเงา) จะเห็นได้ว่าทุก sub-deck S_x (เมื่อ $x \leq 49$) จะมี potential contribution จำนวน 1 life-year ให้กับช่วงที่แรเงา (shaded interval) แต่สำหรับ sub-deck S_x ($x \geq 51$) จะไม่มี potential contribution ให้กับช่วงที่แรเงา ส่วนทุก ๆ ชีวิตใน sub-deck S_{50} มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. potential contribution ให้กับช่วงที่ก่อนช่วงที่แรเงามีค่าเท่ากับ 0
2. potential contribution ให้กับช่วงที่ถัดจากช่วงที่แรเงามีค่าเท่ากับ 1 life-year
3. potential contribution ให้กับช่วงที่แรเงา จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

ถ้าทราบอายุเฉลี่ยของ Starters ใน sub-deck S_{50} ว่ามีค่าเท่ากับ $49 + m_{50}$ (เมื่อ $0 < m_{50} < 1$) อาจจะถือได้ว่า S_{50} ทั้งหมดเข้าที่อายุ $49 + m_{50}$ และจาก assumption ของ Balducci ที่ว่า $1 - t q_{x+t} = (1 - t) \cdot q_x$ เราก็จะคำนวณหา potential exposure ในช่วงที่แรเงาได้อย่างถูกต้อง

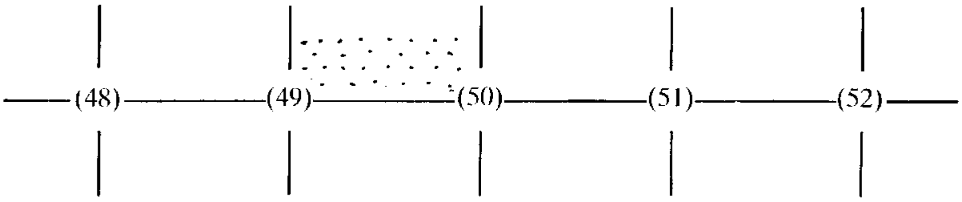
การประมาณโดยให้แต่ละ sub-deck S_x เข้าที่อายุเฉลี่ย $x - 1 + m_x$ จะมีปัญหาในการหา m_x ซึ่งถ้ามี m_x หลาย ๆ ค่า ก็จะทำให้การคำนวณหา exposure ในแต่ละช่วงยุ่งยากยิ่งขึ้น ดังนั้น ในการปฏิบัติเราจึงให้ m_x เท่ากับ $\frac{1}{2}$ เนื่องจากในการสุ่มตัวอย่างโดยทั่วไปได้ค่า m_x เข้าใกล้ $\frac{1}{2}$



จากรูปจะเห็นได้ว่า เราอาจประมาณ sub-deck S_x เข้าที่อายุ $x - \frac{1}{2}$ ซึ่งใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย $S_x \Big]_{x-1}^{x}$ ซึ่งเป็นสัญญลักษณ์ที่เขียนแบบ Range notation และเขียนสัญญลักษณ์ $S_x^{x-\frac{1}{2}}$ เป็นสัญญลักษณ์ที่เขียนแบบ central age notation ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ : Deaths คิดแบบ Age next birthday, $\theta_x \Big]_{x-1}^{x}$

: Starters คิดแบบ Age nearest birthdays, $S_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$



S_{48}	S_{49}	S_{50}	S_{51}	S_{52}

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า ทุก sub-deck S_x จะอยู่ตรงที่ 2 ช่วงที่ติดต่อกัน สำหรับช่วงที่แรเงาและ potential contribution ใน sub-deck S_x ($x \leq 48$) มีค่าเท่ากับ 1 life-year ส่วน potential contribution ใน sub-deck S_x ($x \geq 51$) มีค่าเท่ากับ 0 และเราอาจประมาณ potential contribution ของ sub-deck S_{49} กับ S_{50} ได้ โดยวิธีต่อไปนี้

วิธีที่ 1 potential contribution โดย sub-deck S_{49} และ S_{50} คือ

$$1\left(\frac{1}{2}S_{49}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}S_{49}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}S_{50}\right)+0\left(\frac{1}{2}S_{50}\right)=\frac{7}{8}S_{49}+\frac{1}{8}S_{50}$$

วิธีที่ 2 potential contribution โดย sub-deck S_{49} และ S_{50} เท่ากับ

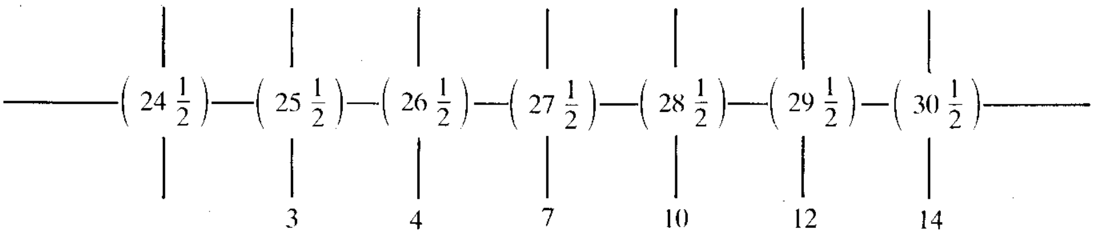
$$1\left(\frac{1}{2}S_{49}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{49}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{50}\right)+0\left(\frac{1}{2}S_{50}\right)=\frac{3}{4}S_{49}+\frac{1}{4}S_{50}$$

วิธีที่ 3 เป็นวิธีที่นิยมใช้มาก โดยใช้ central age assumption จะได้ potential contribution โดย S_{49} และ S_{50} เท่ากับ $1(S_{49})+0(S_{50})=S_{49}$

ตัวอย่างที่ 4.4.1 กำหนดตารางให้ดังนี้

อายุ x	Starters S_x	New entrant n_x	Withdrawal W_x	Enders e_x	Deaths θ_x
	Age next birthday	Age nearest birthday	Age nearest birthday	Age last birthday	Age nearest birthday
2[illegible]	80	90	16	20	3
26	50	110	20	40	4
27	70	120	34	80	7
28	90	140	40	120	10
29	100	150	50	350	12
30	120	160	60	400	14
รวม	510	770	220	1,010	50

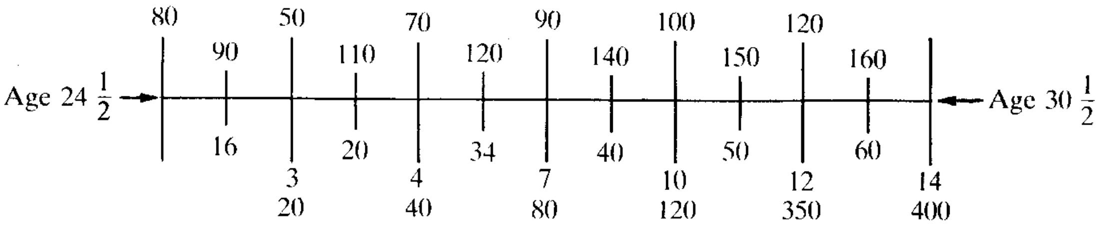
จากตารางจะเห็นได้ว่า death คิดแบบ Age nearest birthday ซึ่งเขียนสัญญลักษณ์แบบ Range notation ได้เป็น $\theta_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$ เราจึงต้องสร้างหลักเป็นเลขจำนวนครึ่งหนึ่ง โดยจำนวนคนตายจะต้องไว้ที่ปลาย unit intervals ดัง diagram ต่อไปนี้



และเขียนสัญลักษณ์แบบ central age symbols ได้ดังนี้

$S_x^{x-\frac{1}{2}}$, n_x^x, W_x^x, $e_x^{x+\frac{1}{2}}$

และเขียน diagram แสดงได้ดังนี้



และเราสามารถคำนวณ exposure ในแต่ละช่วงได้ โดยที่ E_x แทน $E_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$ และ $\theta_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$ ดังนั้น อัตรามรณะที่ได้จะเป็นอัตรามรณะของอายุ $x - \frac{1}{2}$

$$\therefore q_{x-\frac{1}{2}} = \frac{\theta_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}}{E_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}}$$

แต่ถ้า $\theta_x \Big|_x^{x+1}$ ดังนั้น $E_x \Big|_x^{x+1}$ ด้วย จะได้

$$q_x = \frac{\theta_x \Big]_x^{x+1}}{E_x \Big]_x^{x+1}}$$

และถ้า $\theta_x \Big]_{x-1}^{x}$ ดังนั้น $E_x \Big]_{x-1}^{x}$ ด้วย จะได้

$$q_{x-1} = \frac{\theta_x \Big]_{x-1}^{x}}{E_x \Big]_{x-1}^{x}}$$

ข้อสังเกต subscript ของ q ดูได้จาก lower limit ของ θ_x หรือ E_x แบบ range notation

4.5 Writing Formulas by Routine

จาก Exposure สำหรับ Single interval เขียนได้ดังนี้

$$E_x = \sum_{z=a}^{x-1} j_z + f_x$$

เมื่อ $j_z = (S+N-W-E-\theta)_Z$

f_x เป็น linear compound ของ sub-decks ทั้ง 5 ณ อายุ x

และ f factors เป็นสัมประสิทธิ์ของ linear compound

การอธิบายและเขียนสูตรเพื่อคำนวณอัตรามรณะเรามีขั้นตอนในการทำดังนี้

4.5.1 The initial value formula

ให้ a เป็นอายุที่น้อยที่สุดจากสูตรของ E_x เราจะได้

$$E_a = \sum_{z=-\infty}^{a-1} j_z + f_a$$

$$= f_a$$

4.5.2 The continuous formula

ให้ p_x เป็น function ที่ได้จาก f_x โดยแทนแต่ละ f factor ด้วย complement ของมัน (p = 1 − f) ตัวอย่างเช่น ถ้า

$$f_x = 1\,S_x + \frac{3}{4} n_x - \frac{1}{2} W_x - 0.e_x - 0.\theta_x$$

$$\therefore p_x = 0\,S_x + \frac{1}{4} n_x - \frac{1}{2} W_x - 1.e_x - 1.\theta_x$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า

$$j_x = f_x + p_x$$

จาก Single interval formula จะได้

$$E_{x+1} = \sum_{z=-\infty}^{x} j_z + f_{x+1}$$

หรือ

$$E_{x+1} = \sum_{z=-\infty}^{x-1} j_z + f_x + p_x + f_{x+1}$$

$$\therefore E_{x+1} = E_x + p_x + f_{x+1}$$

ซึ่งเป็น continuous formula

4.5.3 The checking Formula

ให้ h เป็นอายุสูงสุดในการศึกษาอัตรามรณะ

จากสูตร Single interval ถ้าให้ $x = h + 1$ จะได้

$$E_{h+1} = \sum_{z=-\infty}^{h} j_z + f_{h+1}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

4.5.4 Interpretation

$$q_y = \frac{\theta_x}{E_x}$$

โดยที่ y = lower limit ของ unit interval ที่ defined โดย θ_x

ตัวอย่างที่ 4.5.1

กำหนดให้ deaths คิดแบบ Age last birthday, Starters และ Enders คิดแบบ Age nearest birthday, New-entrant และ Withdrawal คิดแบบ Age last birthday และให้ a = 20, h = 75 จะเขียนสูตรเพื่อคำนวณอัตรามรณะ

วิธีทำ

1. Categories :	S_x^x	$n_x^{x+\frac{1}{2}}$	$W_x^{x+\frac{1}{2}}$	e_x^x	$\theta_x \Big\rvert_x^{x+1}$
2. f factors :	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
3. p factors :	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

4. Formula

Single interval : $E_x = \sum_{z=-\infty}^{x-1} j_z + \left(S + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}w - e \right)_x$

Initial value : $E_{20} = \left(S + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}w - e \right)_{20}$

Continuous : $E_{x+1} = E_x + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}w - \theta \right)_x + \left(S + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}w - e \right)_{x+1}$

Checking : $E_{76} = 0$

Interpretation : $q_x = \frac{\theta_x}{E_x}$

ตอบ

4.6 Tabulation โดยใช้ Calendar Age

การหา Calendar Age หาได้จากสูตร

Calendar age = Calendar year of event − Calendar year of birth

= CYE − CYB

ซึ่ง Calendar age สำหรับ Starters, new entrants, withdrawals enders และ deaths หาได้ดังนี้

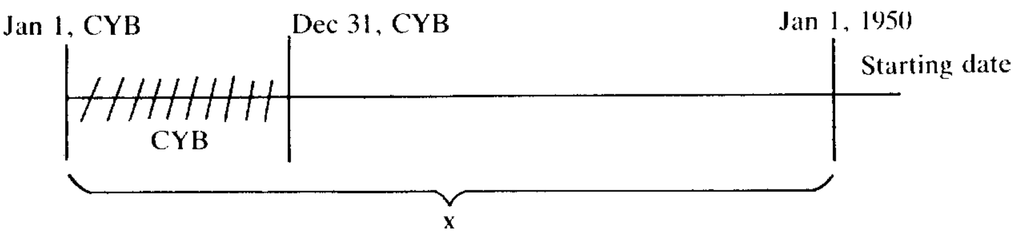
Calendar age สำหรับ Starters

1. ถ้าให้ Starting date เป็น Jan 1, 1950 ดังนั้น Starters ที่เกิดในปี 1900 จะมี calendar age ดังนี้

Calendar age = 1950 − 1900

= 50 ปี

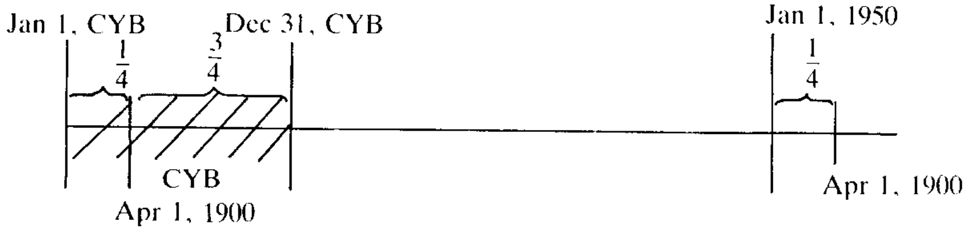
ซึ่งจริง ๆ แล้ว Starters กลุ่มนี้จะมีอายุอยู่ระหว่าง 49 ถึง 50 ปี ดังนั้นเราจะได้ว่า Calendar age 50 ก็คืออายุของวันเกิดครั้งต่อไป (Age next birthday) นั่นเอง และเราเขียนสัญญลักษณ์แทนด้วย $S_{50}^{49\frac{1}{2}}$ สำหรับสัญญลักษณ์ทั่ว ๆ ไปก็คือ $S_x^{x-\frac{1}{2}}$ เขียนรูปแบบได้ดังนี้



S_x : x = 1950 − CYB

$\therefore S_x \Big]_{x-1}^{x} \doteqdot S_x^{x-\frac{1}{2}}$

2. ถ้าให้ Starting date เลื่อนจาก Jan 1, 1950 ไปเป็น Apr 1, 1950 ดังนั้น Starters ที่เกิดในปี 1900 จะมี Calendar year of birth (CYB) เป็น 1900 ดังรูป



$S_x : x = 1950 - CYB$

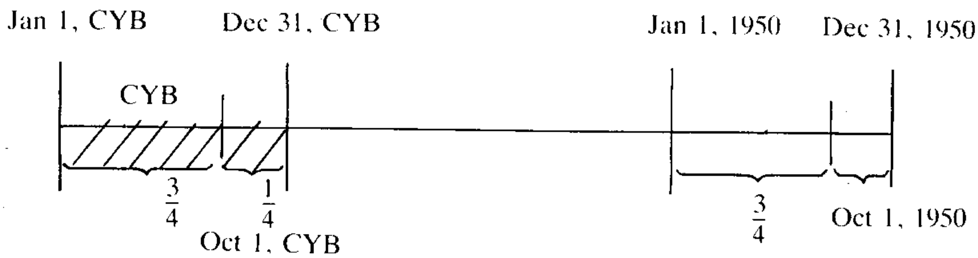
หาอายุสูงสุดได้เท่ากับ $x + \frac{1}{4}$

และอายุต่ำสุดได้เท่ากับ $x + \frac{1}{4} - 1 = x - \frac{3}{4}$

จะได้ $S_x \Big]_{x-\frac{3}{4}}^{x+\frac{1}{4}} \doteqdot S_x^{x-\frac{1}{4}}$

$\therefore$ Starters กลุ่มนี้จะมีอายุระหว่าง 49.25 ถึง 50.25 ซึ่งเขียนเป็นสัญญลักษณ์ $S_{50} \Big|_{49.25}^{50.25}$ หรือเขียนในรูป Range notation ได้เป็น $S_{50}^{49.75}$ หรือในรูปทั่ว ๆ ไปก็คือ $S_x^{x-\frac{1}{4}}$

3. ถ้าให้ Starting date เลื่อนจาก Jan 1, 1950 ไปเป็น Oct 1, 1950 ถ้าให้ CYB เป็น 1900 ดังรูป



$\therefore S_x : x = 1950 - CYB$

หาอายุสูงสุดได้เท่ากับ $x + \frac{3}{4}$

และอายุต่ำสุดได้เท่ากับ $x + \frac{3}{4} - 1 = x - \frac{1}{4}$

จะได้ $S_x \Big]_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{3}{4}} \doteq S_x^{x+\frac{1}{4}}$

$\therefore$ Starters กลุ่มนี้จะมีอายุระหว่าง 49.75 ถึง 50.75 ปี ซึ่งเขียนเป็นสัญญลักษณ์ $S_{50}\Big]_{49.75}^{50.75}$ หรือเขียนในรูป Range notation ได้เป็น $S_{50}^{50.25}$ หรือเขียนรูปทั่ว ๆ ไปได้ดังนี้ $S_x^{x+\frac{1}{4}}$

4. ถ้าให้ Starting date เลื่อนจาก Jan 1, 1950 ไปเป็น Dec 31, 1950 ดังรูป

$\therefore S_x : x = 1950 - CYB$

หาอายุสูงสุดได้เท่ากับ $x + 1$

อายุต่ำสุดได้เท่ากับ $x + 1 - 1 = x$

จะได้ $S_x \Big]_{x}^{x+1} \doteq S_x^{x+\frac{1}{2}}$

$\therefore$ Starters กลุ่มนี้จะมีอายุระหว่าง 50 ถึง 51 ปี ซึ่งตรงกับ Age last birthday และเราเขียนสัญญลักษณ์แทนด้วย $S_{50}\Big]_{50}^{51}$ หรือเขียนเป็น range notation ได้เป็น $S_{50}^{50.5}$ รูปทั่ว ๆ ไปก็คือ $S_x^{x+\frac{1}{2}}$

Calendar age สำหรับ Enders

มีวิธีการหาเหมือน Starters

Uniformity ระหว่าง Starters และ Enders

ถ้าให้ observation period เริ่มจาก Jan 1, 1950 ถึง Dec 31, 1955 เราจะถือว่า observation period คือ

ก) เที่ยงคืนของ Dec 31, 1949 ถึง Dec 31, 1955 หรือ

ข) เช้าตรู่ของ Jan 1, 1950 ถึงเช้าตรู่ของ Jan 1, 1956

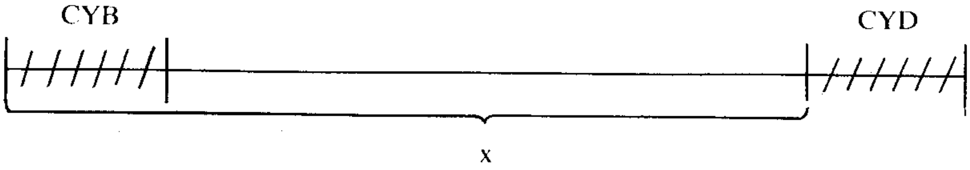
Calendar age สำหรับ Deaths

หาได้จาก

$\theta_x : x =$ calendar year of death-calendar year of birth $= CYD - CYB$

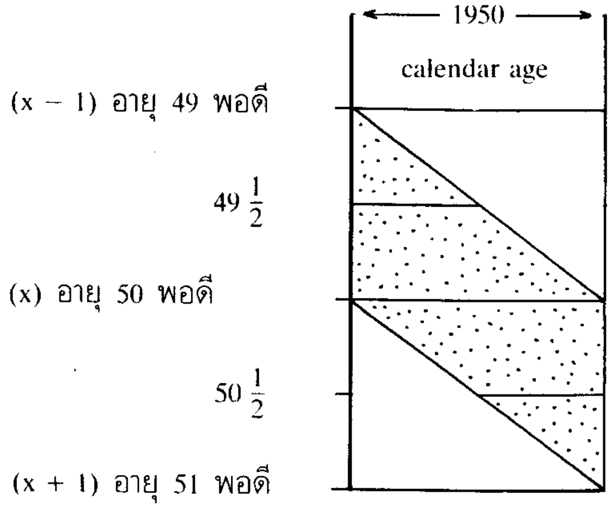
$\therefore$ Sub-deck θ_{50} จะถือจำนวนคนตายจากอายุ 49 ถึง 51 ปี คือ $\theta_{50} \Big]_{49}^{51}$ รูปทั่ว ๆ ไปคือ $\theta_x \Big]_{x-1}^{x+1}$

โดยที่ x + 1 คืออายุที่มากที่สุด ซึ่งคือคนที่เกิดต้นปีแล้วไปตายปลายปี ส่วน x − 1 คืออายุที่น้อยที่สุด ซึ่งคือคนที่เกิดปลายปีแล้วไปตายต้นปี ดังรูป



$$\theta_x \Big]_{x-1}^{x+1} \doteqdot \theta_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$$

พิจารณา diagram ดังต่อไปนี้



จาก diagram จะเห็นว่ามีจำนวนคนตายระหว่างอายุ $49\frac{1}{2}$ ถึง $50\frac{1}{2}$ เท่ากับจำนวน $\frac{3}{4}$ ของจำนวนคนตาย θ_{50} ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนคนตายระหว่างอายุ 49 ถึง $49\frac{1}{2}$และ $50\frac{1}{2}$ถึง 51

จะเห็นว่าจำนวนคนตายระหว่างอายุ $49\frac{1}{2}$ ถึง $50\frac{1}{2}$ มีจำนวนมากกว่าจำนวนคนตายใน 2 ช่วงดังกล่าวมาก ดังนั้นในทางปฏิบัติเราจึงประมาณ θ_{50} โดยใช้ central death assumption เป็น $\theta_{50} \Big]_{49\frac{1}{2}}^{50\frac{1}{2}}$ หรือเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปคือ $\theta_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$

Calendar age สำหรับ withdrawals

หาได้จาก

W_x : x = calendar year of withdrawal − calendar year of birth = CYW − CYB

วิธีการคิดเหมือนของ deaths ซึ่งจะได้ $W_x \Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$

ถ้าเขียนเป็น central age notation จะได้ W_x^x

Calendar age สำหรับ new entrants

หาได้จาก

n_x : x = Calendar year of new cntrnnt − calendar year of birth = CYN−CYB

วิธีคิดเหมือนของ deaths ซึ่งจะได้ $n_x \Big]_{x-1}^{x+1}$ **และเราประมาณโดยใช้ central death assumption จะได้**

$$n_x \Big|_{x-1}^{x+1} \doteq n_x \Big|_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$$

และเขียนเป็น Central age notation ได้เป็น n_x^x

4.7 Insuring Ages

บริษัทอาจคิดอายุที่เริ่มประกัน (issue age) ได้หลายวิธีดังต่อไปนี้

ก. ใช้อายุวันเกิดครั้งต่อไป (age next birthday) ซึ่งวิธีนี้มักจะใช้กับ Industrial Insurance

ข. ใช้อายุที่ใกล้วันเกิด (age nearest birthday) ซึ่งวิธีนี้มักจะใช้กับ Ordinary Insurance

ค. ใช้อายุของวันเกิดครั้งสุดท้าย (age last birthday) ซึ่งวิธีนี้มักจะใช้กับ Ordinary Insurance

แต่อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าบริษัทจะคิดอายุที่เริ่มประกันโดยวิธีไหนก็ตาม บริษัทจะถือว่าผู้เอาประกันมีอายุ x ในวันเริ่มประกัน (exact insuring age x) โดยจะถือว่าวันเริ่มประกันเป็นวันเกิดที่สมมติของผู้เอาประกัน (hypothetical brithday) ตัวอย่างเช่น จากข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

วันเกิด	วันเริ่มประกัน	กฎเกณฑ์สำหรับการคิดอายุเมื่อวันเริ่มประกัน	อายุเมื่อเริ่มประกัน	วันเกิดสมมติที่บริษัทประกันคิดให้
Jan 15, 1920	Feb 15, 1960	Age next birthday	41	Feb 15, 1919
Jan 15, 1920	Feb 15, 1960	Age nearest birthday	40	Feb 15, 1920
Jan 15, 1920	Jan 10, 1961	Age last birthday	40	Jan 10, 1921

อัตรามรณะที่หาได้โดยใช้ insuring age ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย q^{I}_{x} หรือ $q^{I}_{x-\frac{1}{2}}$ หรือ $\mu^{I}_{x+\frac{1}{2}}$ เป็นต้น ซึ่งเราสามารถเป็นให้เป็น q^{R}_{x} (เป็น q_x) ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$q^{I}_{x-\frac{1}{2}}$ เมื่อ x เป็น age next birthday ณ วันเริ่มประกัน ซึ่งพวกที่เริ่มประกันอายุ x จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x-\frac{1}{2}$ ดังนั้นอายุประกัน $x-\frac{1}{2}$ จะมีค่าประมาณเท่ากับอายุที่แท้จริง $x-1$ ซึ่งจะได้ $q^{I}_{x-\frac{1}{2}} \doteqdot q_{x-1}$

สรุปได้ว่า

1. สำหรับ q^{I}_{x} เมื่อ x เป็น age next birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x-\frac{1}{2}$

q^{I}_{x} เมื่อ x เป็น age nearest birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ x

q^{I}_{x} เมื่อ x เป็น age last birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x+\frac{1}{2}$

ดัง diagram ต่อไปนี้

$$q^{I}_{x} \xrightarrow{\text{next}} q^{R}\Big]_{x-1}^{x} \doteqdot q^{R}_{x-\frac{1}{2}}$$

$$q^{I}_{x} \xrightarrow{\text{nearest}} q^{R}\Big]_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \doteqdot q^{R}_{x}$$

$$q^{I}_{x} \xrightarrow{\text{last}} q^{R}\Big]_{x}^{x+1} \doteqdot q^{R}_{x+\frac{1}{2}}$$

2. สำหรับ q^{I}_{x-1} เมื่อ x เป็น age next birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x-\frac{3}{2}$

q^{I}_{x-1} เมื่อ x เป็น age nearest birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ x

q^{I}_{x-1} เมื่อ x เป็น age last birthday จะมีอายุที่แท้จริงปริมาณ $x-\frac{1}{2}$

เขียน diagram แสดงได้ดังนี้

$$q^{I}_{x-1} \xrightarrow{\text{next}} q^{R}\Big]_{(x-1)-1}^{x-1} = q^{R}\Big]_{x-2}^{x-1} \doteqdot q^{R}_{x-\frac{3}{2}}$$

$$q^{I}_{x-1} \xrightarrow{\text{nearest}} q^{R}\Big]_{(x-1)-\frac{1}{2}}^{(x-1)+\frac{1}{2}} = q^{R}\Big]_{x-\frac{3}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \doteqdot q^{R}_{x}$$

$$q^{I}_{x-1} \xrightarrow{\text{last}} q^{R}\Big]_{(x-1)}^{(x-1)+1} = q^{R}\Big]_{x-1}^{x} \doteqdot q^{R}_{x-\frac{1}{2}}$$

3. สำหรับ $q^I_{x-\frac{1}{2}}$ เมื่อ x เป็น age next birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x - 1$

$q^I_{x-\frac{1}{2}}$ เมื่อ x เป็น age nearest birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x - \frac{1}{2}$

$q^I_{x-\frac{1}{2}}$ เมื่อ x เป็น age last birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ x

ดัง diagram ต่อไปนี้

$q^I_{x-\frac{1}{2}}$

next: $$q^R\Big]^{x-\frac{1}{2}}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)-1} = q^R\Big]^{x-\frac{1}{2}}_{x-\frac{3}{2}} \doteq q^R_{x-1}$$

nearest: $$q^R\Big]^{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} = q^R\Big]^{x}_{x-1} \doteq q^R_{x-\frac{1}{2}}$$

last: $$q^R\Big]^{\left(x-\frac{1}{2}\right)+1}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)} = q^R\Big]^{x+\frac{1}{2}}_{x-\frac{1}{2}} \doteq q^R_{x}$$

4. สำหรับ $q^I_{x+\frac{1}{2}}$ เมื่อ x เป็น age next birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ x

$q^I_{x+\frac{1}{2}}$ เมื่อ x เป็น age nearest birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x + \frac{1}{2}$

q^I_{x+1} เมื่อ x เป็น age last birthday จะมีอายุที่แท้จริงประมาณ $x + 1$

เขียน diagram แสดงได้ดังนี้

$q^I_{x+\frac{1}{2}}$

next: $$q^R\Big]^{x+\frac{1}{2}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)-1} = q^R\Big]^{x+\frac{1}{2}}_{x-\frac{1}{2}} \doteq q^R_{x}$$

nearest: $$q^R\Big]^{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} = q^R\Big]^{x+1}_{x} \doteq q^R_{x+\frac{1}{2}}$$

last: $$q^R\Big]^{\left(x+\frac{1}{2}\right)+1}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)} = q^R\Big]^{x+\frac{3}{2}}_{x+\frac{1}{2}} \doteq q^R_{x+1}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. ระยะเวลาในการศึกษาอัตรามรณะเริ่มจาก 1954 ถึง 1957 จะเติมตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

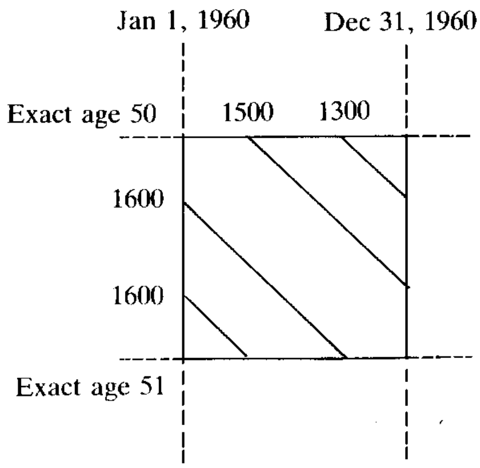
Policy Number	Data	Include or Exclude	Exposure Measurement Begin	Exposure Measurement Ceases
1.	Issued 3-1-48 Still in force			
2.	Issued 4-1-49 Died 3-1-54			
3.	Issued 2-1-50 Lapsed 2-1-53			
4.	Issued 4-1-49 Lapsed 10-1-58			
5.	Issued 3-1-57 Still in force			

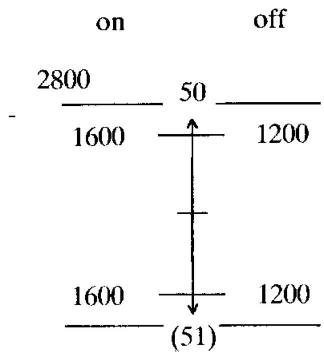
2. จงจัดประเภทรายการ (Starters, new entrants, withdrawals, enders และ deaths) ในโจทย์ข้อ (1)

3. จงคำนวณ exposure ของแต่ละรายการในการศึกษาสำหรับโจทย์ข้อ (1)

4. จากข้อมูลที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้
   1. ณ Jan 1, 1960 มีคนที่มีชีวิตอยู่เข้ามาให้สังเกตดังนี้
      ก. 1,600 คน ที่อายุ $50\frac{1}{4}$ พอดี
      ข. 1,600 คน ที่อายุ $50\frac{3}{4}$ พอดี
   2. มีคน 1,500 คน เข้ามาให้สังเกตที่อายุ 50 พอดี เมื่อ April 1, 1960
   3. มีคน 1,300 คน เข้ามาให้สังเกตที่อายุ 50 พอดี เมื่อ Oct 1, 1960
   4. ไม่มีผู้ใดที่เข้ามาให้สังเกตอีกแล้วและไม่มีผู้ใดออกไปจากการสังเกตนอกจากการตาย
   5. ระยะเวลาในการศึกษาอัตรามรณะเริ่มจาก Jan 1, 1960 ถึง Dec 31, 1960
   6. มี 1,200 คน เหลืออยู่ที่อายุ $50\frac{1}{4}$ และเหลืออยู่ที่อายุ $50\frac{3}{4}$
   7. ยังมีคนเหลืออยู่อีกบ้างที่อายุ $51\frac{1}{4}$ และ $51\frac{3}{4}$ แต่จำนวนคนเหล่านี้ไม่ได้เป็นสิ่งสำคัญในการแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้

8. ในระหว่างปีกรมธรรม์ในปี 1960 จำนวนคนตายระหว่างอายุ 50 และ 51 เท่ากับ 800 จากข้อมูลข้างต้นนี้ เราสามารถเขียน diagram แสดงได้ดังรูป





จงหา q_{50}

5. ก) จาก diagram ในตัวอย่างที่ 4.4.1 จงหาคำนวณหา exposure และหาอัตรามรณะพร้อมทั้งเขียน subscript ของ q ด้วย

ข) จงเติมข้อความให้สมบูรณ์ "Subsript ของ q จะเหมือนกับ......... ของ unit interval........."

ค. ในกฎเบื้องต้นต่อไปนี้

Net exposure = Potential units-Cancelled units

E_{28} สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

$$E_{28} = S_{25} + n_{25} - W_{25} - e_{25} - \theta_{25} + S_{26} + n_{26} - W_{26} - e_{26} - \theta_{26} + S_{27}$$
$$+ n_{27} - W_{27} - e_{27} - \theta_{27} + (\ )S_{28} + (\ )n_{28} - (\ )W_{28} - (\ )e_{28} - (\ )\theta_{28}$$

จงเติมตัวเลขในวงเล็บที่หายไปให้สมบูรณ์

ง. จากของ (ค) ตัวเลขที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ S_{28} เราเรียกว่า "f" factor สำหรับ Starter ซึ่งคือระยะเวลาที่เหลืออยู่จากจุดที่ S_{28} เข้าจนถึงจุดสุดสิ้นช่วงนั้น ซึ่ง defined โดย θ_{28} ทำนองเดียวกัน สัมประสิทธิ์ของ n_{28} เรียกว่า "f" factor สำหรับ new entrants อยากทราบว่าวิธีหา "f" factor ของรายการต่าง ๆ ที่ง่าย ๆ จากสัญญลักษณ์ $S_x^{x}\ \frac{1}{2}$, n_x^{x}, w_x^{x}, $e_x^{x+\frac{1}{2}}$ และ $\theta_x \Big|_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$ ทำได้อย่างไร และจงเติมคำลงในช่องว่างต่อไปนี้ให้สมบูรณ์ เมื่อจำนวนคนตายเราวางไว้ที่ปลายหลักของแต่ละ unit interval ต่าง ๆ "f" factor สำหรับ deaths จะมีค่าเท่ากับ..........โดยอัตโนมัติ

จ. สัญญลักษณ์ j_x อธิบายได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$j_x = S_x + n_x - w_x - e_x - \theta_x$$
$$= (S + n - w - e - \theta)_x$$

สัญญลักษณ์ f_x คือผลบวกของกลุ่ม S_x, n_x, w_x, e_x และ θ_x ซึ่งแต่กลุ่มจะ weighted โดย f factor ของมัน ตัวอย่างเช่นในข้อ (ค) f_{28} จะมีค่าเท่ากับบรรทัดสุดท้ายของสมการ และ E_{28} สามารถเขียนอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$E_{28} = \sum_{z=(\ )}^{z=(\ )} j_z + f_{(\ )}$$

จงเติมตัวเลขในวงเล็บที่ว่างไว้

ฉ. จงเขียนสมการสำหรับ E_{29} โดยใช้แบบตามข้อ (ค) และอธิบายสมการนั้นให้อยู่ในรูปกระทัดรัดโดยใช้สัญญลักษณ์ j และ f

ช. จงเขียน E_{25} โดยใช้ form ข้อ (ค) และอธิบายสมการนี้ให้อยู่ในรูปกระทัดรัด

6. ถ้า $E_x = \sum_{z=a}^{z=x-1} j_z + f_x$

เมื่อ $f_x = (1)S_x + \left(\frac{1}{2}\right)n_x - \left(\frac{1}{2}\right)w_x - (0)e_x - (0)\theta_x$

จาก worksheet ที่กำหนดให้ดังนี้

Tabulated Age x	S_x	n_x	w_x	e_x	θ_x	j_x	$\sum_{z=a}^{x-1} j_z$	f_x	E_x
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
25	80	90	16	20	3	131	–	117	117
26	50	110	20	40	4		131		
27	70	120	34	80	7				
28	90	140	40	120	10				
29	100	150	50	350	12				
30	120	160	60	400	14				
Total									

จงคำนวณ exposure โดยเติมในช่องว่างของ worksheet ที่กำหนดให้

7. ในการศึกษาอัตรามรณะ รายการทั้ง 5 คิดแบบ Age last birthdays

$S_x^{x+\frac{1}{2}}, n_x^{x+\frac{1}{2}}, w_x^{x+\frac{1}{2}}, e_x^{x+\frac{1}{2}}, \theta_x \Big]_x^{x+1}$

ก) จงหา f factor ของแต่ละรายการ สมมติว่าการตายนับที่จุดปลายช่วง

ข) จงเขียน f_x

ค) ถ้าให้อายุต่ำสุดเป็น $a = 20$ อายุสูงสุดเป็น $h = 24$ จะเขียน E_{24}

ง) จงเขียน E_{24} ให้อยู่ในรูปกระทัดรัด

จ) จงเขียน E_{20} ให้อยู่ในรูปกระทัดรัด

8. กำหนดให้ $S_x^{x+\frac{1}{2}}, n_x^{x+\frac{1}{4}}, w_x^{x-\frac{1}{2}}, e_x^{x+\frac{1}{2}}, \theta_x \Big|_x^{x+1}$

จงเขียนสูตร E_x

9. จงคำนวณหาอัตรามรณะจากตารางต่อไปนี้ โดยเติมในช่องว่างให้สมบูรณ์ แล้วคำนวณอัตรามรณะหาแต่ละอายุ

Age x	S_x	n_x	w_x	e_x	θ_x	j_x	$\sum_{z=a}^{z=x-1} j_z$	f_x	E_x
48	230	10	20	0	2				
49	220	60	40	0	4				
50	200	80	50	0	6				
51	250	90	80	196	6				
52	300	80	90	264	8				
53	0	40	50	204	2				
54	0	40	20	262	2				
55	0	0	0	294	0				
รวม	1,200	400	350	1,220	30				

10. (a) In the following, the word "exact" means that the event of entry or exit occurred on a birthday, so that the integral tabulated age is exactly equal to the true age; in such a case, the central age is the same as the tabulated age.
Write the formulas for each study, using the pattern of the solution above.

Basic for Tabulated Age x

Study	Staters	New Entrants	Withdrawals	Enders	Deaths
1	Last	Last	Last	Last	Last
2	Next	Next	Next	Next	Next
3	Exact	Nearest	Nearest	Exact	Last
4	Last	Exact	Nearest	Last	Nearest
5	Next	Exact	Nearest	Next	Nearest

(b) Given the following symbols, write the exposure formulas.

$$s_x^{x+\frac{1}{4}},\ n_x^{x+\frac{3}{5}},\ w_x^{x+\frac{1}{2}},\ e_x^{x+\frac{1}{2}},\ \theta_x \Big]_x^{x+1}$$

11. The function J_x is defined by the equation $J_z = (\theta + e + w - n - s)_z$ Hence, J_z is the negative of j_z · Let F_z and P_z be defined as the negatives of f_z and p_z respectively. Prove :

(a) $$\sum_{z=-\infty}^{z=+\infty} J_z = 0$$

(b) $J_z = F_z + P_z$

(c) $$\sum_{-\infty}^{\infty} F_z + \sum_{-\infty}^{\infty} P_z = 0$$

(d) $$\sum_{z=-\infty}^{z=x-1} J_z + J_x + \sum_{z=x+1}^{z=+\infty} J_z = 0$$

(e) From (d) , prove that

$$\sum_{z=x+1}^{z=+\infty} J_z + P_x = \sum_{z=-\infty}^{z=x-1} j_z + f_x$$

12. (a) The function J_z, F_z, P_z are useful when the exposures are computed continuously from the highest tabulated age to the youngest (against the stream of traffic). Prove, by simple tranformations of the formulas derived in the text, each of the following :

Single interval : $E_x = \sum_{z=x+1}^{z=\infty} J_z + P_x$ or $\sum_{z=x}^{z=\infty} J_z - F_x$

Initial value	: $E_h = P_h$
Continuous	: $E_x = E_{x+1} + F_{x+1} + P_x$
Checking	: $E_{a-1} = 0$

(b) There are two special cases, both of some practical importance, in which the f factor are such that the worksheets and formulas are simplified

(1a) Case of the Zero f Factors. Prove : If all the f factor are equal to zero, so that f_x vanishes for all x, then

$$E_x = \sum_{z=-\infty}^{z=x-1} j_z \text{ and } E_{x+1} = E_x + j_x$$

$$E_x = \sum_{z=x}^{z=\infty} J_z \text{ and } E_x = E_{x+1} + J_x$$

(2a) Case of the .5f Factors. Let E'_x be the exposure computed by placing the deaths at the mid-points of the respective unit intervals. Hence, $E'_x = E_x - \frac{1}{2}\theta_x$ and, by the shuttling method, E'_x is the exposure associated with the force of mortality at the mid-points of the interval. If all five categories have been to tabulated by the same method (for example, by age last birthday) and if the deaths are placed at the mid-points of the unit intervals. all the f factors will equal .5

Prove : $E'_x = \sum_{z=-\infty}^{z=x-1} j_z + \frac{1}{2} j_x$ or $\sum_{z=-\infty}^{z=x} j_z - \frac{1}{2} j_x$

and $E'_x = \sum_{z=x+1}^{z=\infty} J_z + \frac{1}{2} J_x$ or $\sum_{z=x}^{z=\infty} J_z - \frac{1}{2} J_x$

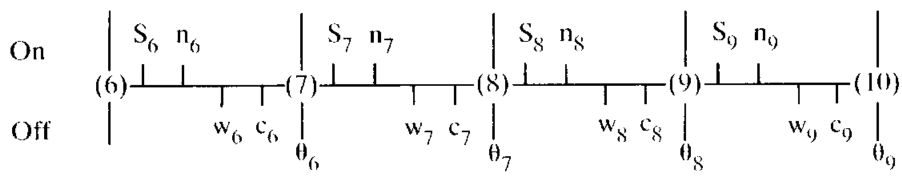
(c) In (a) of this exercise, the single interval formula

$$E_x = \sum_{z=x+1}^{z=\infty} J_z + P_x$$

was derived algebraically by the student. It is instructive to obtain this formula directly a diagram, using the basic the basic concept for computing exposures when working against the stream of traffic :
Net Exposure = Possible units − Impossible units
For siniplicity, and without loss of generality, assume that $a = 6$ and $h = 9$. Assume also that the symbols are

$$s_x^{x+\frac{1}{5}},\ n_x^{x+\frac{2}{5}},\ w_x^{x+\frac{3}{5}},\ e_x^{x+\frac{4}{5}},\ \theta_x \Big|_x^{x+1}$$

The superscripts make the situation academic, but they keep the diagram clear :



จงหา E_6, E_7 (โดยใช้วิธี against the stream of traffic)

13. A third important method is called "a January 1 to December 31 study, with deaths at calendar insuring ages as well as withdrawals." Here also, it is convenient to think of the period as running from a December 31 to a later December 31.
Suppose the period runs from (midnight of) December 31, 1949 to (midnight of) December 31, 1955. The tabulating rules are :

Deaths θ_x : x = Calendar year of death-VYB
Starters S_x : x = 1949-VYB
New entrants n_x : x = Issue age
Withdrawals w_x : x = Calendar year of withdrawal-VYB
Enders e_x : x = 1955-VYB

Write the formulas.

14. ระยะเวลาในการศึกษาอัตรามรณะเริ่มจาก 1 ม.ค.2500 ถึง 31 ธ.ค.2504 คำนวณอายุของ deaths, new entrants และ withdrawals ได้โดยวิธี Calendar age อายุของ Starters x คำนวณจาก x = 2500 – ปีเกิด และอายุของ enders x คำนวณจาก x = 2505 – ปีเกิด กำหนดตารางต่อไปนี้ จงหาอัตรามรณะ

อายุ x	S_x	n_x	w_x	e_x	θ_x
41	100	20	20	0	2
42	106	18	22	98	2
43	102	20	16	100	4
44	106	14	10	102	2
45	0	0	0	108	0
รวม	414	72	68	408	10

15. a. Assuming that a mortality study deals with ordinary policies, issue ages being based on age nearest birthday, translate each of the following rates to approximate actual ages : q_x^I ; $q^I_{x+\frac{1}{2}}$; $q^I_{x-\frac{1}{2}}$; q^I_{x-1}

b. Similarly if the study deals with industrial policies (age next birthday)

c. Similarly if the study deals with ordinary policies in which issue ages have been based on age last birthday at date of issue.

16. Write the single interval formula, and interpret the ratio $\frac{\theta_x}{E_x}$, assuming the five categories have all been tabulated according to

1) Age last birthday
2) Age nearest birthday
3) Age next birthday
4) Calendar Age

17 This exercise is especially important because it illustrates the method used most frequently by insurance compaines in the United States. In capsule form, the method is called an "anniversary-to-anniversary study, with deaths at last insuring age and withdrawals at calendar insuring ages."

The period of observation runs from anniversaries in 1950 to anniversaries in 1955. The tabulating rules are as follows :

Deaths θ_x : x = Year in which occurs the anniversary date preceding the date of death-VYB

Starters S_x : x = 1950-VYB

New entrants n_x : x = Issue age

Withdrawals w_x : x = Calendar year of withdrawal-VYB

Enders e_x : x = 1955-VYB

Which three categories are tabulated at exact insuring ages? Write the formulas.