ดังนั้น $\lim_{h \to 0} \frac{P_1(t+h) - P_1(t)}{h} = -mP_1(t) + mP_0(t)$

$=> \quad P_1'(t) \quad = \quad mP_1(t) + mP_0(t)$

$=> \quad P_1'(t) \quad -mP_1(t) + me^{-mt} : \because P_0(t) = e^{-mt}$

จาก Differential Equation of Order 1 degree 1 * *

$\frac{du}{dx} + R(x)u = S(x)$; เมื่อ $y = u(x)$ $R(x)$ และ $s(x)$ เป็นฟังก์ชั่นของ x

(R(x) และ S(x) เป็นเทอมคงที่ได้) จะได้คำตอบทั่วไปดังนี้คือ

$$ue^{\int R(x)\,dx} = \int s(x)\, e^{\int R(x)\,dx} dx + C$$

ดังนั้น

จากสมการ $\quad P_1'(t) = -mP_1(t) + me^{-mt}$

$=> \quad \frac{d}{dt} P_1(t) + mP_1(t) = me^{-mt}$

$=> \quad P_1(t)\, e^{\int m dt} = \int me^{-mt}, e^{\int m dt} dt + C$ ในที่นี้ $u = P_1(t)$, $R = m$, $S = me^{-mt}$

$=> \quad P_1(t) e^{mt} = mt + C$

นั่นคือ $\quad P_1(t) = (mt)\, e^{-mt} : C = 0$ ตามข้อตกลงที่ (4)

ในทำนองเดียวกัน (โดยการพิสูจน์ติดต่อกันมาเป็นลำดับ) จะได้

$$P_2(t) = \frac{(mt)^2 e^{-mt}}{2!}, \; P_3(t) = \frac{(mt)^3 e^{-mt}}{3!} \ldots,$$

$$\ldots\; P_n(t) = \frac{(mt)^n e^{-mt}}{3n!}$$

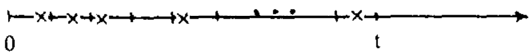
นั่นคือ $\quad P_x(t) = \frac{(mt)^x e^{-mt}}{X!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

ให้ $\quad A = mt$

$=> \quad P_x(t) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!}$; $x = 0, 1, 2,$

นั่นคือ $\quad f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} e^x}{X!}$; $x = 0, 1, 2, \ldots$

พิสูจน์ วิธีที่ 2 แบ่งช่วงเวลา (0, t) ออกเป็นช่วงเวลาย่อย ๆ n ช่วงขนาดความยาวช่วงละ $h = t/n$ ดังภาพ



ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะมีปรากฏการณ์ใด ๆ อุบัติขึ้น x ครั้งในช่วงเวลา (0, t) จึงมีเท่ากับ (ประมาณ) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดปรากฏการณ์ขึ้นในแต่ละช่วงเวลาย่อย x ช่วง ๆ ละ 1 ครั้ง

แต่ในแต่ละช่วงเวลาย่อย ๆ หนึ่งอาจมีปรากฏการณ์อุบัติขึ้นหรือไม่ก็ได้ (อุบัติ-ไม่อุบัติ) แสดงว่าการเกิดปรากฏการณ์ขึ้นในช่วงเวลาย่อยหนึ่ง ๆ มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลิ และเนื่องจากการเกิดปรากฏการณ์ในแต่ละช่วงเวลาย่อยนั้นเป็นอิสระต่อกัน (ข้อตกลงที่ 1) ดังนั้นจำนวนปรากฏการณ์ที่จะอุบัติขึ้น x ครั้ง ($x = 0, 1, 2, \ldots$) ในช่วงเวลาย่อย n ช่วง จึงมีการแจกแจงแบบทวินาม

และเนื่องจากค่าความน่าจะเป็นที่จะมีปรากฏการณ์ใดอุบัติขึ้นในแต่ละช่วงเวลาย่อยมีค่าเท่ากับ mh (ข้อตกลงที่ 2)

ดังนั้น Pr (มีปรากฏการณ์อุบัติขึ้น x ครั้งใน n ช่วงเวลาย่อย)

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{mt}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{mt}{n}\right)^{n-x};\ h = t/n$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{x!\ (n-x)!}\ \frac{\lambda^x}{n^x}\ \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)(n-x)!}{n.n.n.\ldots n(n-x)!}\ \frac{\lambda^x}{x!}\ \frac{(1-A/n)}{(1-A/n)}$$

$$= 1(1-I/n)\ (1-2/n)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\ \frac{(1-A/n)}{(1-Un)}$$

ถ้าแบ่งช่วงเวลา (0, t) ให้ถี่ยิ่งขึ้น กล่าวคือ $n \to \infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} 1-(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{\lambda^x}{n}\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-A/n)} = \ \ x!$

กล่าวคือ เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $(1-\frac{\lambda}{n})^n \to e^{-\lambda}$ และ $(1-\frac{\lambda}{n})^x \to 1$

ดังนั้น

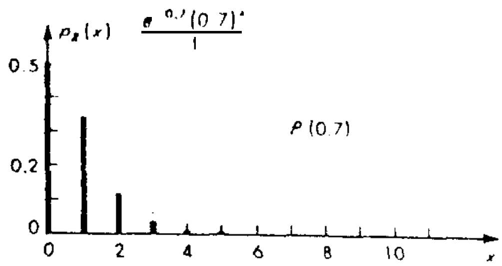
Pr (เกิดปรากฏการณ์ x ครั้งในช่วงเวลา (0, t) ที่แบ่งเป็นช่วงเวลาย่อย ๆ n ช่วง) $= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

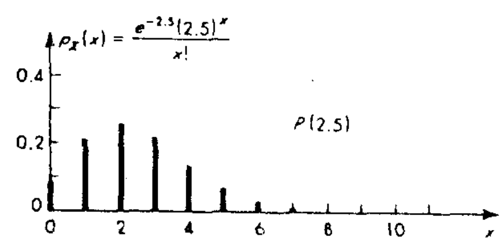
$$=> P_x(t) = f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \; ; x = 0, 1, 2, \ldots$$

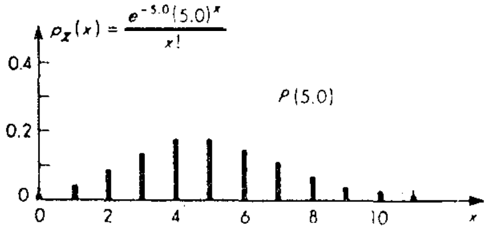
หมายเหตุ กระบวนการศึกษาถึงการแจกแจงของตัวแปรสุ่มใด ๆ ที่แสดงจำนวนครั้งของปรากฏการณ์ที่อุบัติขึ้นในช่วงเวลา (ระยะทาง พื้นที่ ปริมาตร จุด ฯลฯ) ที่แน่นอน โดยยึดถือข้อตกลงทั้ง 4 ประการดังกล่าวข้างต้น และผลของการศึกษาพบว่าการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นมีการแจกแจงแบบพัวซอง เราเรียกกระบวนการศึกษานี้ว่า "กระบวนการพัวซอง" (Poisson Process)

อนึ่ง การจะให้ข้อยุติลงไปว่าสถานะการณ์หนึ่งใดจะมีการแจกแจงแบบพัวซอง (ทั้ง ๆ ที่เป็นเรื่องของการนับเหมือนกัน) นั้นเป็นเรื่องที่ควรระมัดระวังเพราะอาจผิดพลาดได้ง่าย ขอให้คำนึงถึงข้อตกลงทั้ง 4 ประการนั้นไว้เสมอทุกครั้งที่จะมีการลงยุติ ตัวอย่างเช่น การศึกษาการแจกแจงของจำนวนไข่ของแมลงที่ปรากฏอยู่ตามพื้นที่เพาะปลูก เรื่องนี้แม้จะเป็นศึกษาถึงการนับจำนวนไข่แมลงที่นับในฤดูกาลหนึ่ง ๆ (ก่อนฤดูเพาะปลูก) ซึ่งน่าจะเป็นการแจกแจงแบบพัวซองได้เพราะกำหนดเวลาของการศึกษาจำกัดแน่นอนและเป็นเรื่องของการนับ (Counting Event) แต่มิอาจสรุปว่าเป็นการแจกแจงแบบพัวซองได้ เพราะโดยธรรมชาติแมลงจะลงวางไข่เป็นกระจุกไข่และตัวอ่อนจะอยู่รวมกันเป็นกระจุก (Cluster) ซึ่งขัดกับข้อตกลงที่ 1 ข้างต้น

ภาพการกระจายแบบพัวซองปรากฏดังนี้







Poisson distribution $P(v)$.

$$p_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

ทฤษฎี 4.8 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซองมีพารามิเตอร์เป็น $\lambda = mt$ แล้ว ตัวแปร X จะมี *mgf* ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad E(X) = V(X) = A$$

พิสูจน์ $\because f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \quad M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

โดยอาศัยการกระจายเทเลอร์

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad M_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$E(X) = M_X'(t)\Big|_{t=0}$$

$$= \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t - 1)}\Big|_{t=0}$$

$$= \lambda$$

$$V(X) = M_X''(t)\Big|_{t=0} - \lambda^2$$

$$M_X''(t) = \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t - 1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$M_X''(t)\Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \quad V(X) = \lambda$$

นั่นคือ เมื่อตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซองแล้ว $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, $E(X) = V(X) = I$

ทฤษฎี 4.9 เมื่อ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ แล้ว ตัวสถิติ $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ จะมีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์เป็น $n\lambda$

พิสูจน์ $\because f_{X_i}(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$; $x = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Rightarrow \quad M_{X_i}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \quad M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = e^{n\lambda(e^t-1)}$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^y}{y!} \; ; y = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$E(Y) = V(Y) = n\lambda$$

ทฤษฎี 4.90 ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์เป็น $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ตามลำดับแล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ข้อสังเกต

1. กรณีที่ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซองมีพารามิเตอร์เป็น λ แล้วจะมี mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนเป็น $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $E(X) = V(X) = \lambda$ นั้น ข้อนี้ก็มีลักษณะของการสังเกตเพื่อหาการแจกแจงค่าคาดหมาย และความแปรปรวนได้เช่นเดียวกับตัวแปรสุ่มแบบอื่น ๆ คือ เราสามารถทราบการแจกแจงค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนได้จาก mgf กล่าวคือ ตัวแปรสุ่มที่มี mgf เป็น $e^{\lambda(e^t-1)}$ เราสามารถทราบได้ทันที (ดูที่กำลังของ e) ว่าตัวแปรสุ่มนั้นมีการแจกแจงแบบพัวซองมีค่าคาดหมายเท่ากับ λ และความแปรปรวนเท่ากับ λ เช่น

$$M_X(t) = e^{0.1(e^t-1)} \text{ ก็แสดงว่า } f_X(x) = \frac{e^{-0.1}(0.1)^x}{x!} \; ; x = 0, 1, 2, \ldots$$

และ $E(X) = V(X) = 0.1$ หรือพบว่า $M_X(t) = \left(\dfrac{0.2e^t}{1-0.8e^t}\right)^4$ ก็แสดงว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบนิเสธทวินามที่มีพารามิเตอร์ $p = 0.2$, และ $r = 4$ มีคาดหมาย $\dfrac{4}{0.2} = 20$ และความแปรปรวนเท่ากับ $\dfrac{4(0.8)}{0.2} = 16$ ดังนี้เป็นต้น เรื่องนี้ขอให้นักศึกษาพยายามจดจำเทคนิคเล็ก ๆ น้อย ๆ เหล่านี้ไว้เพราะจะประหยัดเวลาในการศึกษาได้มาก

2. ทฤษฎี 4.8 เป็นเรื่องของการแจกแจงของตัวสถิติ หลักการของทฤษฎีนี้จะถูกนำไปใช้ในทางสร้างตัวทดสอบสำหรับตรวจสอบนัยสำคัญของพารามิเตอร์ λ และการประมาณค่าพารามิเตอร์ λ

3. ทฤษฎี 4.9 เป็นกรณีทั่ว ๆ ไปของทฤษฎี 4.8 ทฤษฎีนี้เรียกว่า Reproductive Property ของตัวแปรสุ่มพัวซอง เป็นการยืนยันให้เห็นว่าตัวแปรสุ่มแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์ต่างกัน (หรือเหมือนกัน ถ้ามีพารามิเตอร์เหมือนกันเรามักหมายถึงกรณีสุ่มตัวอย่างมาจากกลุ่มประชากรที่มีพารามิเตอร์นั้น) นั้น สามารถรวมตัวกันได้เป็นตัวแปรสุ่มแบบพัวซองเช่นเดิม

ตัวอย่าง 4.13 ตัวทรานซิสเตอร์ในเครื่องคอมพิวเตอร์จะเสื่อมคุณภาพ 1 ตัวในทุก 100 ชั่วโมงทำงาน และเมื่อใดก็ตามที่มีตัวทรานซิสเตอร์เสื่อมคุณภาพตั้งแต่ 3 ตัวขึ้นไปเครื่องจะหยุดทำงาน

ก. โปรแกรมหนึ่งใช้เวลาเครื่อง (Computer Time) 20 ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องยังคงทำงานได้ดีในช่วงเวลานี้

ข. ถ้าเครื่องหยุดทำงานทันทีที่ตัวทรานซิสเตอร์เสื่อมคุณภาพ 2 ตัว จงคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในข้อ ก.

วิธีทำ ให้ X = จำนวนตัวทรานซิสเตอร์ที่เสื่อมคุณภาพภายในเครื่องคอมพิวเตอร์ เนื่องจากในทุก 100 ชั่วโมงทำงานจะมีตัวทรานซิสเตอร์เสื่อมคุณภาพ 1 ตัว

=> จะมีตัวทรานซิสเตอร์เสื่อมคุณภาพ $= \frac{1}{100} = .01$ ตัวในทุก 1 ชั่วโมง => $m = .01$

ก. โปรแกรมหนึ่งใช้เวลาเครื่อง 20 ชั่วโมง

=> จะมีตัวทรานซิสเตอร์เสื่อมคุณภาพในช่วงเวลา 20 ชั่วโมง $= mt = (.01)(20) = .02$ ตัว

Pr (เครื่องจักรยังคงทำงานได้ดีในช่วงเวลา 20 ชั่วโมงนี้) $= \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-0.2}(0.2)^x}{x!}$

$$= 1 - \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-0.2}(0.2)}{x!}$$

$$= 1 \quad .0011485$$

$$= .9988515$$

ข. ถ้าเครื่องหยุดทำงานทันทีที่มีตัวทรานซิสเตอร์เสื่อมคุณภาพ 2 ตัว

Pr (เครื่องยังคงทำงานได้ดีในช่วงเวลา 20 ชั่วโมงนี้)

$$\sum_{x=0}^{I} \frac{e^{-0.2}\ (0.2)}{x!}$$

$$= \quad 1 \quad - \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-0.2}(0.2)^{x}}{x!} = \quad 1 - .0175231$$

$$= \quad .9824769$$

ตัวอย่าง 4.14 บริษัทจำหน่ายอุปกรณ์และเครื่องมือทำสถิติเกี่ยวกับการจำหน่ายเครื่องมือผ่าตัดเอาไว้และพบว่า โดยเฉลี่ยจะจำหน่ายเครื่องมือผ่าตัดได้เพียงเดือนละ 2 เครื่อง

โดยปกติการสั่งซื้อเครื่องมือประเภทนี้จะต้องสั่งล่วงหน้า 1 ปี เพราะผู้ผลิตไม่ปรารถนาจะผลิตมากนัก เพราะเกรงว่าจะล้าสมัย ขณะเดียวกันบริษัทผู้จำหน่ายก็ไม่ปรารถนาจะสั่งสินค้ามาสต๊อกไว้มาก เพราะต้องเสียค่าใช้จ่ายเรื่องการดูแลรักษาและทำให้ทุนจมโดยไม่จำเป็น

อยากทราบว่าบริษัทผู้จำหน่ายควรสั่งสินค้าประเภทนี้เข้าสต๊อกไว้กี่เครื่องจึงจะมั่นใจได้ถึง 99% เป็นอย่างน้อยว่าสินค้าดังกล่าวจะมีไว้เพียงพอและเหมาะสมกับความต้องการของลูกค้าในช่วงเวลา 1 ปี

วิธีทำ ให้ x = ปริมาณความต้องการเครื่องมือผ่าตัดในช่วงเวลา 1 ปี

k = จำนวนสินค้า (เครื่องมือผ่าตัด) ที่บริษัทผู้จำหน่ายควรสั่งเข้าสต๊อก

บริษัทจำหน่ายเครื่องมือผ่าตัดได้โดยเฉลี่ยเดือนละ 2 เครื่อง

=> $m = 2$ และ $\lambda = mt = 2(12) = 24$ เครื่องต่อปี

สิ่งที่ต้องการคือ

จาก $Pr(x \leqslant k) \quad \geqslant \quad .99 \qquad , k = ?$

=> $$\sum_{x=0}^{k} \frac{e^{-24}\, 24^{x}}{x!} \quad \geqslant \quad .99$$

โดยอาศัยทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง

=> $k \quad \cong \quad 35$

นั่นคือบริษัทตัวแทนจำหน่ายควรสต๊อกเครื่องมือผ่าตัดไว้ปีละประมาณ 35 เครื่อง จึงจะเชื่อถือได้ว่าเป็นจำนวนที่พอเหมาะกับความต้องการของผู้ใช้ในแต่ละปี

ตัวอย่าง 4.15 หนังสือเล่มหนึ่งหนา 585 หน้ามีคำที่พิมพ์ผิดหรือตกหล่นอยู่ทั้งสิ้น 43 คำ คำผิดเหล่านี้มีอยู่กระจัดกระจายทั่วเล่มหนังสือ (โดยสุ่ม) ถ้าเลือกหนังสือมาโดยสุ่ม 10 หน้าเพื่อหาคำผิด จงหาค่าความน่าจะเป็นที่จะไม่พบคำผิดปรากฏอยู่เลย

วิธีทำ ให้ X = จำนวนคำผิดที่ปรากฏอยู่

∵ หนังสือหนา 585 หน้า มีคำผิดทั้งสิ้น 43 คำ

→ โดยถัวเฉลี่ยแล้วจะปรากฏคำผิดอยู่หน้าละ $m = \frac{43}{585} = .0735$ คำ

สุ่มหนังสือมา $t = 10$ หน้า $\Rightarrow \lambda = mt = (.0735)(10) = .735$ คำ

ดังนั้น $Pr(X=0) = \frac{e^{-.735}(.735)^0}{0!} = .496$ คำ

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะไม่ปรากฏคำผิดใดเลยในหนังสือที่เลือกมาโดยสุ่ม 10 หน้า เท่ากับ .496

ตัวอย่าง 4.16 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีคุณสมบัติ $Pr(X=1) = Pr(x=2)$ จงหา Pr (X = 1 หรือ 2 อย่างใดอย่างหนึ่ง)

วิธีทำ ∵ ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซองและ $Pr(X = 1) = Pr(X = 2)$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

$$\Rightarrow 2\lambda e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2$$

ดังนั้น $Pr(X = 1$ หรือ $2) = Pr(X = 1) + Pr(X = 2)$

$$\frac{e^{-2}2^1}{1!} \quad \frac{e^{-2}2^2}{2!}$$

$$= 4e^{-2}$$

$$= 4(1.1353)$$

$$= .5413$$

ตัวอย่าง 4.16 การตรวจเม็ดโลหิตแดงในเลือดของมนุษย์สามารถกระทำได้ด้วยการตรวจนับจำนวนได้จากตัวอย่างเลือด (Specimen) โดยอาศัยกล้องจุลทัศน์ ถ้าในเลือดปริมาณหนึ่งของคนปกติจะมีเม็ดโลหิตแดงอยู่ 20 เม็ด จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างเลือดของคนปกติผู้หนึ่งจะมีเม็ดโลหิตแดงต่ำกว่า 15 เม็ด

วิธีทำ ให้ X = จำนวนเม็ดโลหิตแดงในตัวอย่างเลือดของคนปกติ

$\lambda = 20$ = จำนวนเม็ดโลหิตแดง (ถัวเฉลี่ย) ในตัวอย่างเลือดปริมาณหนึ่ง

$$\Pr(x < 15) = \sum_{x=0}^{14} \frac{e^{-20}20^x}{x!} = .10486$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะปรากฏเม็ดโลหิตแดงในตัวอย่างเลือดของคนปกติต่ำกว่า 15 เม็ด มีค่าเท่ากับ .10486 หรือโอกาสที่คนปกติจะมีเม็ดโลหิตแดงต่ำกว่า 15 เม็ด ในปริมาณเลือดตัวอย่างปริมาตรหนึ่ง ซึ่งจะต้องมีเม็ดเลือดประมาณ 20 เม็ด นั้น เป็นไปได้เพียง 10.48% เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.17 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ ถ้าปรารถนาจะทดสอบข้อสมมุติฐาน $H_0: \lambda = \lambda_0$ Vs $H_1: \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$ และพบว่า เราจะปฏิเสธข้อสมมุติฐานเมื่อ $y = \sum_{i}^{10} X_i \geqslant k$ จงคำนวณหาฟังก์ชั่นของตัว k ที่ทำให้ได้ Test Statistics ที่สอดคล้องกับความเสี่ยงสูงสุด α (Maximum Type I error)

วิธีทำ

จาก $H_0: \lambda = \lambda_0$ vs $H_1: \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$

และปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลัก (H_0) เมื่อ $Y > k$ โดยที่ $Y = \sum_{i}^{10} X_i$ เป็นตัวสถิติ

จาก α = Pr (ปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักเมื่อสมมุติฐานหลักถูกต้อง)

$= \Pr(Y \geqslant k \mid \lambda = \lambda_0)$

แต่เนื่องจาก $X \sim$ Poisson (λ) โดยอาศัยทฤษฎี 4.9 => $Y \sim$ Poisson (10λ)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \Pr(Y > k \mid \lambda = \lambda_0)$$

$$= \Pr\left(\sum_{y=k+1}^{\infty} \frac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^y}{y!} \mid A = \lambda_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \Pr\left(\sum_{y=k+1}^{\infty} \frac{e^{-10\lambda_0}(10\lambda_0)^y}{y!}\right) \text{ หรือ } 1 - \alpha = \Pr\left(\sum_{y=0}^{k} \frac{e^{-10\lambda_0}(10\lambda_0)^y}{y!}\right)$$

ค่า k สามารถหาได้จากสมการนี้ ถ้าทราบค่า λ_0 และกำหนดว่า α ตัวอย่างเช่น $H_0: \lambda = 0.2$ vs $H_1: \lambda > 0.2$ ณ ระดับนัยสำคัญ 5% เราสามารถหาค่า k ได้ดังนี้

$$0.05 = \Pr\left(\sum_{y=k+1}^{\infty} \frac{e^{-2}2^y}{y!}\right) \text{ หรือ } .95 = \Pr\left(\sum_{y=0}^{k} \frac{e^{-2}2^y}{y!}\right)$$

จากตารางพัวซองท้ายเล่มพบว่า $\sum_{y=0}^{4} \frac{e^{-2}2^y}{y!} \approx .95 \Rightarrow k = 4$ แสดงว่าสำหรับสมมติฐาน $H_0: \lambda = 0.2$ vs $H_1: \lambda > 0.2$ ณ ระดับนัยสำคัญเมื่อสุ่มตัวอย่างมา 10 หน่วย เราจะปฏิเสธข้อสมมุติฐาน $H_0: \lambda = 0.2$ เมื่อ $y = \sum_{i}^{10} x_i > 4$

4.2.6 การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค (Hypergeometric Distribution)

จากการศึกษาเรื่องการแจกแจงแบบทวินาม นักศึกษาจะพบว่าการแจกแจงแบบทวินามเป็นเรื่องของการทดลองเบอร์นุลลิที่เป็นอิสระต่อกันติดต่อกันไป n ครั้ง ถ้าพูดถึงการสุ่มตัวอย่างแต่ละตัวอย่างที่สุ่มในแต่ละครั้งจะต้องเป็นอิสระกัน หมายความว่าโอกาสที่หน่วยตัวอย่างแต่ละหน่วย (ในประเภทที่เราสนใจ) มีโอกาสได้รับเลือกเท่ากัน ซึ่งจะเป็นเช่นนี้ได้ก็เฉพาะเมื่อกลุ่มประชากร N มีขนาดใหญ่มาก หรือกลุ่มประชากรมีขนาดไม่ใหญ่มากแต่เราดำเนินการเลือกตัวอย่างแบบเลือกแล้วใส่คืน (Sampling with Replacement) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ในกรณีดังกล่าวข้างต้น ถ้ากลุ่มประชากรมีขนาดใหญ่มากก็คงไม่มีปัญหาในทางปฏิบัติแต่อย่างใด เช่น เลือกนักศึกษา 40 คน เข้ารับการทดลองวิธีสอนแบบใหม่จากบัญชีรายชื่อนักศึกษา 140,000 คน เป็นต้น ทั้งนี้เพราะมีโอกาสเลือกซ้ำได้น้อยมาก กรณีเช่นนี้จะใช้แผนการเลือกตัวอย่างแบบใส่คืนหรือไม่ใส่คืนก็ได้ เพราะไม่มีปัญหาการเลือกตัวอย่างซ้ำหรือนับซ้ำมาก แต่ในกรณีที่กลุ่มประชากรมีขนาดเล็กหรือไม่ใหญ่มากนัก เช่น การเลือกกลุ่มนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์มา 20 คน จากจำนวนนักศึกษาวิชาเอกนี้ทั้งหมด 100 คน เพื่อคำนวณหาสัดส่วนของนักศึกษาที่จำเป็นต้องทำงานพิเศษเพื่อหารายได้จุนเจือครอบครัว กรณีเช่นนี้ ถ้าใช้แผนการเลือกตัวอย่างตามวิธีทวินามคือสุ่มแล้วใส่คืน[1] จะเกิดกรณีเลือกซ้ำ นาย ก. อาจถูกเลือกเข้าไว้ในกลุ่มตัวอย่างมากกว่า 1 ครั้ง (หมายความว่าสอบถาม นาย ก. ในเรื่องเดิมมากกว่า 1 ครั้ง) ซึ่งมิได้ทำให้ได้ข้อสนเทศเพิ่มเติมแต่ประการใด และก่อให้เกิดความผิดพลาดในการคำนวณและการอนุมานได้หลายประการ และในทางปฏิบัติเราก็ไม่นิยมดำเนินการเช่นนี้ โดยทั่วไปนิยมใช้วิธีเลือกแล้วไม่ใส่คืน (Sampling without Replacement) มากกว่า

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่รับกับวิธีเลือกแล้วไม่ใส่คืนคือการแจกแจงแบบ Hypergeometric การแจกแจงแบบนี้พัฒนาขึ้นมาเพื่อขจัดปัญหาจาการนับซ้ำและสนองวิธีการเลือกแล้วไม่ใส่คืนดังกล่าว ซึ่งจะได้กล่าวถึงวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ การนำไปใช้ประโยชน์และความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับการแจกแจงแบบทวินามและการแจกแจงแบบพัวซองโดยละเอียดต่อไป แต่ก่อนที่จะศึกษาถึงเรื่องดังกล่าวจะขอยกตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นความเป็นมาของการแจกแจงแบบพัวซองโดยละเอียดต่อไป แต่ก่อนที่จะศึกษาถึงเรื่องดังกล่าวจะขอยกตัวอย่างเพื่อ

---

[1] วิธีปฏิบัติง่าย ๆ ของการสุ่มแล้วใส่คืนตามกรณีตัวอย่างนี้ก็คือ เขียนชื่อนักศึกษาวิชาเอกทั้งหมด 100 คน ลงในฉลาก ม้วนใส่กล่อง เคล้าให้ทั่วแล้ว (หลับตา) เลือกมาทีละใบ คลี่ดูว่าเป็นชื่อของใครจดไว้แล้วคืนฉลากใบนั้นลงในกล่องตามเดิม เคล้าให้เข้ากันแล้วเลือกใบใหม่ ทำดังนี้เรื่อยไปจนได้รายชื่อครบ 20 ชื่อ

แสดงให้เห็นความเป็นมาของการแจกแจงแบบนี้เสียก่อนเพื่อเป็นการปูพื้นฐานความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้ไว้ชั้นหนึ่ง

ตัวอย่าง 4.18 คณะกรรมการกีฬา 5 คน ซึ่งประกอบด้วยกรรมการชาย 3 คน กรรมการหญิง 2 คน จำเป็นต้องเลือกตัวแทน 3 คน เพื่อเข้าเสนอแผนงานต่อที่ประชุมกรรมการกีฬานานาชาติ ในการนี้กรรมการทุกคนต่างเกี่ยงกันเพราะไม่สันทัดในภาษาต่างประเทศ จึงจำเป็นต้องมีการจับฉลาก จงแสดงให้เห็นแผนการเลือกตัวแทนที่ใช้ได้กับสถานการณ์เช่นนี้ พร้อมทั้งหาความน่าจะเป็นที่ตัวแทนที่ต้องเข้าเสนอแผนงานต่อที่ประชุมนี้จะเป็นชาย 2 คน หญิง 1 คน

วิธีทำ ให้กรรมการกีฬาทั้ง 5 คน คือ $ช_1$, $ช_2$, $ช_3$, $ญ_1$, $ญ_2$

ก. ถ้าเลือกโดยวิธีใส่คืนจะได้จำนวนวิธีเลือกตัวแทนถึง $N^n = 5^3 = 125$ ชุด คือ

$ช_1ช_1ช_1$, $ช_1ช_1ช_2$, $ช_1ช_1ช_3$, $ช_1ช_1ญ_1$, $ช_1ช_1ญ_2$

.

$ญ_2ญ_2ญ_2$, $ญ_2ญ_2ญ_1$, $ญ_2ญ_2ช_3$, $ญ_2ญ_2ช_2$, $ญ_2ญ_2ช_1$

สำหรับการจำแนกโดยละเอียดขอให้นักศึกษาทดลองทำเอง ในที่นี้เพียงแต่จะชี้ให้เห็นว่า ถ้าใช้วิธีเลือกแล้วใส่คืนจะก่อให้เกิดปัญหาการเลือกซ้ำ เช่น $ช_1ช_1ช_1$ หรืออื่น ๆ ซึ่งมิได้ก่อให้เกิดประโยชน์ในทางปฏิบัติแต่อย่างใดซ้ำยังเป็นเรื่องที่น่าขันที่จะเสนอรายชื่อตัวแทนโดยวิธีนี้ เช่น "คณะกรรมการกีฬาขอเสนอรายชื่อตัวแทนเข้าชี้แจงแผนงานแก่ที่ประชุม 3 คน ดังรายนาม ต่อไปนี้ 1. นายกวดหยํา แซ่โก 2. นายกวดหยํา แซ่โก 3. นายกวดหยํา แซ่โก จึงเรียนมาเพื่อทราบ"

ข. ถ้าเลือกโดยวิธีไม่ใส่คืน จะปรากฏจำนวนวิธีเลือกตัวแทนเท่ากับ $\binom{N}{n} = \binom{5}{3} = 10$ ชุด คือ

$ช_1ช_2ช_3$, $ช_1ช_2ญ_1$, $ช_1ช_2ญ_2$, $ช_1ช_3ญ_1$, $ช_1ช_3ญ_2$

$ช_1ญ_1ญ_2$, $ช_2ช_3ญ_1$, $ช_2ช_3ญ_2$, $ช_2ญ_1ญ_2$, $ช_3ญ_1ญ_2$

จะเห็นได้ว่า ถ้าเลือกโดยวิธีนี้จะไม่มีตัวแทนชุดใดที่กรรมการคนใดคนหนึ่งจะถูกเลือกซ้ำแผนการเลือกตัวแทนจึงใช้วิธีนี้

ค. ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวแทนชุดที่ประกอบด้วยกรรมการชาย 2 คน และกรรมการหญิง 1 คน = ?

จากจำนวนชุดของตัวแทนที่เป็นไปได้ทั้งสิ้น $\binom{N}{n} = \binom{5}{3} = 10$ ชุด พบว่าเป็นชุดที่ประกอบด้วยกรรมการชาย 2 คน และกรรมการหญิง 1 คน มีอยู่ทั้งสิ้น 6 ชุด

ดังนั้น Pr (ตัวแทนประกอบด้วยกรรมการชาย 2 คน และกรรมการหญิง 1 คน) = 6/10

$$6/10 = 6/\binom{5}{3} = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5-3}{3-2}}{\binom{5}{3}}$$

จากตัวอย่างเราสามารถนำหลักการมาคำนวณมาขยายเป็นหลักการทั่วไปได้ดังนี้

ถ้าปรารถนาจะสุ่มตัวอย่างมา n หน่วยจากกลุ่มประชากรขนาด N ซึ่งประกอบด้วยประชากรย่อย 2 ส่วน ส่วนแรกคือส่วนที่เราให้ความสนใจนั้นประกอบด้วยหน่วยต่าง ๆ k หน่วย **ที่เหลืออีก $N-k$ คือส่วนที่เราไม่สนใจ ความน่าจะเป็นที่กลุ่มตัวอย่างขาด n จะประกอบไปด้วย** หน่วยที่สนใจ x หน่วย $(x \leqslant n)$ คือ $\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

ขอให้ข้อสังเกตไว้ ณ ที่นี้เป็น 3 ประการ คือ

1. จำนวน $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$ **ก็คือจำนวนวิธีเลือกตัวแทนหรือหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่**สอดคล้องกับข้อกำหนด เช่น ในกรณีตัวอย่าง $6 = \binom{3}{2}\binom{5-3}{3-2}$ คือจำนวนวิธีเลือกตัวแทนที่ประกอบด้วยกรรมการชาย 2 คน หญิง 1 คน เป็นต้น

2. ค่าของ x จะต้องไม่เกิน n ค่าของ k จะต้องไม่เกิน N และค่าของ n จะต้องไม่เกิน N

3. พิจารณา $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$ จะพบว่า $k + (N-k) = N$ และ $x + (n-x) = n$ จึงเป็นการยืนยันว่าค่าของ k จะต้องไม่เกิน N และค่าของ x จะต้องไม่เกิน n ดังข้อสังเกตที่ 2 และยังแสดงให้เห็นว่าค่าของ x จะวิ่งจาก 0 ไปสุดที่ n คือ $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

นิยาม 4.6 ตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแสดงจำนวนตัวอย่างที่อยู่ในข่ายแห่งความสนใจในกลุ่มตัวอย่างขนาด n จะมีการแจกแจงแบบ Hypergeometric ถ้า X มีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นดังนี้คือ

$$f_X(x) = f_x(x; N, k, n) \begin{cases} = \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{x}} & ; x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ = 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

โดยที่ N เป็นจำนวนเต็มบวกและ $k \leqslant N$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $n \leqslant N$

ทฤษฎีที่ 4.11 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบ Hypergeometric แล้วจะพบว่า

$$E(X) = n\frac{k}{N} \text{ และ } V(X) = n\frac{k}{N}\frac{N-k}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

พิสูจน์ $E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f_{X}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\frac{k}{x} \cdot \frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \text{ [1]}$$

$$= n \cdot \frac{k}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

ให้ $x - 1 = y \Rightarrow x = 1 + y$

$$\Rightarrow E(X) = n \cdot \frac{k}{N}\sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{k-1}{y}\binom{N-k}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$= n \cdot \frac{k}{N}\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{y=0}^{n-1}\binom{k-1}{y}\binom{N-k}{n-y-1}$$

แต่ $\because \sum_{i=0}^{m}\binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}$

$$\Rightarrow E(X) = n \cdot \frac{k}{N}\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}}\binom{N-1}{n-1}$$

$$= n \cdot \frac{k}{N}$$

---

[1] $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a(a-1)}{b(b-1)}\binom{a-2}{b-2} = \dots = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-r)}{b(b-1)(b-2)\dots(b-r)}\binom{a-r-1}{b-r-1}$

เช่น $\binom{5}{3} = \frac{5}{3}\binom{4}{2} = \frac{5.4}{3.2}\binom{3}{1}$

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$$ [1]

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{k}{x}\cdot\frac{k-1}{x-1}\cdot\frac{n}{N}\cdot\frac{n-1}{N-1}\cdot\frac{\binom{k-2}{x-2}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N-2}{n-2}}$$

ให้ $y = x-2$ ดังนั้น $x = y+2$

$$\Rightarrow E(X(X-1)) = \frac{k(k-1)\,n(n-1)}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{\binom{N-1}{n-2}}\sum_{y=0}^{n-2}\binom{k-2}{y}\binom{N-k}{n-2-y}$$

$$= \frac{k(k-1)\,n(n-1)}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{\binom{N-2}{n-2}}\cdot\binom{N-2}{n-2}$$

$$= \frac{k(k-1)\,n(n-1)}{N(N-1)}$$

ดังนั้น $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$

$$= \frac{k(k-1)\,n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nk}{N} - \frac{n^2k^2}{N^2}$$

$$= \frac{nk}{N}\left\{\frac{(k-1)(n-1)}{(N-1)} + 1 - \frac{nk}{N}\right\}$$

$$= \frac{nk}{N}\left\{\frac{Nkn-Nk-Nn+N+N^2-N-Nkn+nk}{N(N-1)}\right\}$$

$$= \frac{nk}{N}\cdot\frac{(N-k)(N-n)}{N(N-1)}$$

$$= n\cdot\frac{k}{N}\cdot\frac{N-k}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

[1] ขอให้นักศึกษาหาเหตุผลดูว่าเพราะเหตุใด จึงต้องใช้ Factorial Moment

นั่นคือ เมื่อตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบ Hypergeometric แล้วจะพบว่า $E(X) = \frac{nk}{N}$

และ $V(X) = n \cdot \frac{k}{N} \cdot \frac{N-k}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

ข้อสังเกต

1. เนื่องจากเราแบ่งกลุ่มประชากรออกเป็น 2 ส่วน (Subpopulation) คือส่วนที่สนใจประกอบด้วยหน่วยต่าง ๆ k หน่วย และที่เหลืออีก N − k หน่วย อยู่นอกความสนใจ ดังนั้น โอกาสที่จะได้หน่วยที่สนใจติดขึ้นมาเป็นตัวอย่างจึงมีค่าเท่ากับ $\frac{k}{N} = p$ โอกาสที่จะได้หน่วยที่อยู่นอกความสนใจติดขึ้นมาเป็นตัวอย่างเท่ากับ $\frac{N-k}{N} = q$ ดังนั้นในทางปฏิบัติจริงถ้าเราทราบสัดส่วน p และ q เราจะสามารถแบ่งกลุ่มประชากรได้เป็น 2 ส่วน ได้ทันที คือ กลุ่มประชากร N จะประกอบด้วยหน่วยที่อยู่ในความสนใจ Np หน่วย หน่วยที่อยู่นอกความสนใจ Nq หน่วย เช่น ทราบว่าในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีนักศึกษา 10,000 คน ในจำนวนนี้เป็นนักศึกษาชายเสีย 40% ที่เหลือเป็นนักศึกษาหญิง 60% แสดงว่าในมหาวิทยาลัยแห่งนั้นมีนักศึกษาชาย Np = (10,000) (.4) = 4,000 คน และนักศึกษาหญิง Nq = (10,000) (.6) = 6,000 คน ดังนี้เป็นต้น ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถเสนอการแจกแจงแบบ Hypergeometric ได้อีกรูปหนึ่งดังนี้

$$f_x(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

และมีค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้คือ $E(X) = np$ และ $V(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}$ (สำหรับวิธีการพิสูจน์จะขอละเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด)

2. ในกรณีของการแจกแจงแบบ Hypergeometric นั้น ถ้ากลุ่มประชากรมีขนาดใหญ่ คือ $N \to \infty$ แล้ว การแจกแจงแบบนี้จะลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบทวินาม หรือสามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นของกรณี Hypergeometric ได้ด้วยการแจกแจงแบบทวินาม สามารถพิสูจน์ให้เห็นได้ดังนี้

จาก $$f_x(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=> f_x(x) = \frac{\frac{Np!}{x!\ (Np-x)!}\ \frac{Nq!}{(n-x)!\ (Nq-n+x)!}}{\frac{n!\ (N-n)!}{N!}}$$

$$= \frac{Np(Np-1)\ldots(Np-x+1)!}{x!}\ \frac{Nq(Nq-1)\ldots(Nq-n+x+1)}{(n-x)!}$$

$$\cdot\ \frac{n!}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$$

$$= \frac{n!}{x!\ (n-x)!}\ \frac{Np(Np-1)\ldots(Np-x+1)Nq(Nq-1)\ \ldots\ (Nq-n+x+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$$

$$= \binom{n}{x}\underbrace{p(p-\frac{1}{N})(p-\frac{2}{N})(p-\frac{3}{N})\ldots(p-\frac{x-1}{N})}_{x\ \text{เทอม}}\underbrace{q(q-\frac{1}{N})\ldots(q-\frac{n-x-1}{N})}_{(n-x)\ \text{เทอม}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_x(x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

นั่นคือ $f_x(x) \cong \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ เมื่อ $N \to \infty;\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$

โดยทั่วไปการแจกแจงแบบทวินามจะสามารถนำมาใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบ Hypergeometric ได้ดี ถ้าหากว่า $\frac{n}{N} \leqslant 0.1$

3. จากความรู้เรื่องการแจกแจงแบบพัวซอง ถ้าให้ $p = \frac{\lambda}{n}$ เมื่อ $\lambda = mt$ (ดูวิธีพิสูจน์ที่ 2 ทฤษฎี 4.7)

ถ้า $p \to 0$ และ $n \to \infty$ แล้ว การแจกแจงแบบทวินามจะลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบพัวซอง นั่นคือ จาก $f_x(x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ ถ้า $n \to \infty$ และ $p \to 0$ แล้ว $\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ ในกรณีนี้จึงสามารถสรุปได้ว่า

ถ้า n และ N มีขนาดใหญ่มากโดยที่ N>>n (อ่านว่า N ใหญ่กว่า n มาก ๆ) และ p มีค่าน้อยกว่า $\frac{\binom{k}{x}\binom{N-x}{n-x}}{\binom{N}{n}} \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ โดยที่ $\lambda = np$ และ $p = \frac{k}{N}$

ตัวอย่าง 4.19 กล่องใบหนึ่งบรรจุตัวต้านทานไว้ 100 ตัว ในจำนวนนี้มีตัวต้านทานอยู่ 5 ตัว ที่เสื่อมคุณภาพปะปนอยู่

เพื่อที่จะตรวจสอบคุณภาพของตัวต้านทานทั้งกล่อง ผู้ซื้อได้สุ่มตัวอย่างตัวต้านทานขึ้นมา 10 ตัว แล้วนำไปตรวจสอบคุณภาพ ถ้าใน 10 ตัว นั้นมีตัวเสื่อมคุณภาพปะปนอยู่ถึง 2 ตัว ผู้ซื้อจะไม่ยอมซื้อ

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีตัวต้านทานที่เสื่อมคุณภาพ 2 ตัว ปะปนอยู่ในตัวอย่าง

ข. จงคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในข้อ ก. ด้วยวิธีการของการแจกแจงแบบทวินามและพัวซอง

วิธีทำ

ในบรรดาตัวต้านทาน 100 ตัว มีตัวต้านทานที่เสื่อมคุณภาพปนอยู่ 5 ตัว

$=> P = Pr$ (เลือกได้ตัวต้านทานที่เสื่อมคุณภาพ) $= \frac{5}{100} = .05$

ให้ x = จำนวนตัวต้านทานที่เสื่อมคุณภาพที่ปนอยู่ในตัวอย่างขนาด $n = 10$

ก. $Pr(X = 2) = Pr$ (เลือกได้ตัวต้านทานที่เสื่อมคุณภาพ 2 ตัว จากตัวอย่างตัวต้านทาน 10 ตัว)

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{95}{8}}{\binom{100}{10}}$$

$$= \frac{10 \cdot 95! \cdot 10!\, 90!}{87!\, 8!\, 100!}$$

โดยอาศัย Stirling's Formular $n! \cong \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+1/2}$

$$=> Pr(x=2) \simeq \frac{10(\sqrt{2\pi}\, e^{-95}\, 95^{95.5})\,(\sqrt{2\pi}\, e^{-10}\, 10^{10.5})\,(\sqrt{2\pi}\, e^{-90}\, 90^{90.5})}{(\sqrt{2\pi}\, e^{-87}\, 87^{87.5})\,(\sqrt{2\pi}\, e^{-100}\, 100^{100.5})\,(\sqrt{2\pi} \cdot e^{-8}\, 8^{8.5})}$$

$$\simeq .07022$$

ข. การประมาณค่า $Pr(X=2)$ โดยวิธีของการแจกแจงแบบทวินามและพัวซอง

(1) การประมาณค่าโดยวิธีของการแจกแจงแบบทวินาม

$$Pr(X = 2) = \binom{10}{2}(0.05)^2(.95)^8$$

$$= .0746348$$

(2) การกะประมาณค่าโดยวิธีการแจกแจงแบบพัวซอง

$$\lambda = np$$
$$= 10\ (.05)$$
$$= 0.5$$

$$\Rightarrow \Pr(x=2) = \frac{e^{-0.5}(0.5)^2}{2!}$$
$$= 0.075816$$

ตัวอย่าง 4.20 พ่อค้าผู้หนึ่งมีมอเตอร์ไฟฟ้าอยู่ 12 ตัว ในจำนวนนี้เป็นมอเตอร์ที่เสื่อมคุณภาพเสีย 2 ตัว ปรากฏว่ามีลูกค้าผู้หนึ่งสั่งซื้อเหมาหมดทั้ง 12 ตัว

พ่อค้าทราบดีว่าโดยปกติลูกค้าจะต้องตรวจสอบคุณภาพมอเตอร์ 2 ตัว จากหีบห่อสินค้าที่ส่งมอบเสมอ เขาจึงตรึกตรองดูว่า จะทำอย่างไรลูกค้าจึงจะตรวจไม่พบมอเตอร์ที่เสื่อมคุณภาพนั้น กล่าวคือ ควรจะเลือกบรรจุหีบห่อสินค้านี้อย่างไรจึงจะหลอกให้ลูกค้าหลงรับสินค้าได้ ถ้านำสินค้าทั้ง 12 ชิ้น นี้ไปใส่กล่องเดียวกัน ลูกค้าก็จะเลือกตรวจคุณภาพ 2 ชิ้น ถ้าแยกกล่อง ๆ ละ 6 ตัว ลูกค้าจะเลือกโดยสุ่มมาตรวจกล่องละชิ้น กรณีแยกบรรจุกล่องละ 6 ชิ้น ควรจะบรรจุมอเตอร์เสื่อมคุณภาพปนลงไปอย่างไรดี ใส่มอเตอร์เสื่อมคุณภาพลงไปกล่องละ 1 ตัว ดี หรือว่ากล่องหนึ่งไม่ใส่แต่อีกกล่องหนึ่งใส่ทั้งสองตัว ท่านจงช่วยหาหนทางบรรจุหีบห่อสินค้าเพื่อหลอกให้ผู้ซื้อ ๆ สินค้าดังกล่าว

วิธีทำ กลยุทธ์ในการบรรจุหีบห่อมีอยู่ 3 วิธี คือ

1. จัดมอเตอร์ทั้ง 12 ตัว ลงในกล่องใบเดียวกัน
2. จัดแยกเป็น 2 กล่อง แต่ละกล่องมีมอเตอร์ที่เสื่อมคุณภาพปนอยู่กล่องละ 1 ตัว
3. จัดแยกเป็น 2 กล่อง กล่องหนึ่งไม่ใส่มอเตอร์เสื่อมคุณภาพลงไป อีกกล่องใส่ไว้ทั้งสองตัว

ปัญหา กลยุทธ์ใดทำให้ลูกค้ามีโอกาสไม่พบมอเตอร์เสื่อมคุณภาพมากที่สุด

ให้ X = จำนวนมอเตอร์เสื่อมคุณภาพที่ปนอยู่ในกลุ่มตัวอย่างมอเตอร์ 2 ตัว ที่ลูกค้าเลือกมาตรวจสอบ, $k = 2$ = จำนวนมอเตอร์เสื่อมคุณภาพ, $N-k = 12-2 = 10$ = จำนวนมอเตอร์คุณภาพดี

กลยุทธ์ที่ 1 $\quad P(X=0) = \dfrac{\binom{2}{0}\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{1 \cdot 10!}{8!\,2!} \cdot \dfrac{2!\,10!}{12!} = \dfrac{90}{132} = .682$

กลยุทธ์ที่ 2 $\quad P(X=0) = \dfrac{\binom{1}{0}\binom{5}{1}}{\binom{6}{1}} \cdot \dfrac{\binom{1}{0}\binom{5}{1}}{\binom{6}{1}} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{36} = .693$

กลยุทธ์ที่ 3 $\quad P(X=0) = \dfrac{\binom{6}{1}}{\binom{6}{1}} \cdot \dfrac{\binom{2}{0}\binom{4}{1}}{\binom{6}{1}} = 1 \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{6} = .667$

จะเห็นได้ว่ากลยุทธ์ที่ 2 มีค่าความน่าจะเป็นที่ลูกค้าจะตรวจสอบไม่พบสินค้าที่เสื่อมคุณภาพได้มากกว่ากลยุทธ์อื่น ๆ ดังนั้น พ่อค้าควรบรรจุมอเตอร์ไฟฟ้าลงกล่องโดยแยกเป็น 2 กล่อง แต่ละกล่องใส่มอเตอร์เสื่อมคุณภาพไปกล่องละตัว

4.2.7 การกระจายแบบพหุนาม Multinomial Distribution [1]

การแจกแจงแบบพหุนามนับได้ว่าเป็นรูปทั่วไปของการแจกแจงแบบทวินาม กล่าวคือ ในกรณีของการแจกแจงแบบทวินามนั้น เราจะศึกษาผลของการทดลองหรือศึกษาสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ให้ผลออกมาเพียง 2 ลักษณะ คือ Success หรือ Failure อย่างใดอย่างหนึ่ง โดยที่ความน่าจะเป็นหรือสัดส่วน P มีค่าคงที่ตลอดไปในทุกการทดลองเบอร์นุลลิ แต่ในสภาพการณ์ทางปฏิบัติหลายสถานการณ์ความรู้เกี่ยวกับการแจกแจงแบบทวินามยังอยู่ในลักษณะที่ไม่เหมาะสมหรือเพียงพอแก่การประยุกต์ โดยเฉพาะในสถานการณ์ที่ผลการทดลองปรากฏออกมามากเกินกว่า 2 ลักษณะ เช่น การศึกษากลุ่มเลือดของคนซึ่งมีผลลัพธ์ถึง 4 ลักษณะ คือ เลือดกลุ่ม A กลุ่ม B กลุ่ม AB และกลุ่ม O การศึกษาลักษณะและความหนาแน่นของการจราจร ณ บริเวณสี่แยกซึ่งรถคันหนึ่ง ๆ สามารถแยกเส้นทางเดินได้ถึง 4 ลักษณะ (หรือกว่านั้นถ้าเป็นห้าแยก...) คือ ไปทางตรงเลี้ยวซ้าย เลี้ยวขวา และถอยกลับในเส้นทางเดิม การวิจัยทางสังคมศาสตร์ที่สามารถจำแนกผู้ตอบแบบสอบถามตามเชื้อชาติ ศาสนา การศึกษา อายุ สถานภาพสมรส ทัศนคติที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ฯลฯ เป็นต้น จะเห็นได้ว่า ในสถานการณ์เช่นนี้ ความรู้เกี่ยวกับ

---

[1] การกระจายแบบพหุนาม เป็นเรื่องของ Multivariate Model ซึ่งนอกเหนือไปจาก Univariate Model ตามเจตนาของบทนี้ แต่จำเป็นต้องนำมาแทรกไว้เพราะถือว่าเป็นกรณีทั่วไปของการกระจายแบบทวินาม และอีกประการหนึ่ง เรื่องนี้จะถูกนำไปใช้มากในภายหลังโดยเฉพาะในการศึกษาเรื่อง Order Statistic และ χ^2 – test

การแจกแจงแบบทวินามไม่อาจนำมาประยุกต์หรือยังผลสรุปที่ถูกต้องสมบูรณ์ได้ จำเป็นต้องศึกษาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มเป็นชุดที่แต่ละตัวมีการแจกแจงแบบทวินามที่เรียกว่า การแจกแจงแบบพหุนาม

สมมุติในการศึกษาหรือการทดลองหนึ่ง ผลการศึกษาหรือทดลองสามารถปรากฏออกมาได้ถึง k ลักษณะ[1] คือ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ โดยที่การทดลองหนึ่งใดจะปรากฏผลเป็น A_i ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p_i นั่นคือ $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, k, \sum_{1}^{k} p_i = 1$ สมมุติทำการทดลอง (อิสระ) n ครั้ง และปรากฏผลการทดลองดังนี้คือ A_1 รวม x_1 ครั้ง A_2 รวม x_2 ครั้ง ... A_k รวม x_k ครั้ง โดยที่ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ และ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก (Nonnegative Integer)

ดังนั้น การทดลอง ทั้งสิ้น n ครั้ง จึงปรากฏผลดังนี้

$$\overbrace{\underbrace{A_1A_1 \ldots A_1}_{x_1 \text{ ครั้ง}} \quad \underbrace{A_2A_2 \ldots A_2 \ldots}_{x_2 \text{ ครั้ง}} \quad \underbrace{A_ka_k \ldots A_k}_{x_k \text{ ครั้ง}}}^{n \text{ ครั้ง}}$$

ความน่าจะเป็นที่จะปรากฏผลการทดลองลักษณะนี้จึงมีค่าเท่ากับ $P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$ แต่ผลการทดลองที่จะปรากฏเหตุการณ์ A_1 รวม x_1 ครั้ง A_2 รวม x_2 ครั้ง, ... A_k รวม x_k ครั้ง นั้นสามารถเกิดขึ้นได้ในลักษณะต่าง ๆ ได้ถึง $\binom{n}{x_1 x_2 \ldots x_k} = \dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}$ ครั้ง

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่การทดลอง n ครั้ง จะปรากฏผลการทดลองเป็น A_1 รวม x_1 ครั้ง เป็น A_2 รวม x_2 ครั้ง ... เป็น A_k รวม x_k ครั้ง จึงมีค่าเท่ากับ $\dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} p^{x_1} p^{x_2} \ldots p^{x_k} \ldots$ (1)

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถคำนวณหารูปของความน่าจะเป็นตามวิธีพหุนามคือการหาความน่าจะเป็นตามกฎความน่าจะเป็นเชิงซ้อน (Law of Compound Probability) ดังนี้

ให้ $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ คือค่าของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ณ จุด $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ โดยที่ X_i คือตัวแปรสุ่มที่แสดงจำนวนครั้งของการปรากฏเหตุการณ์ A_i; $i = 1, 2, \ldots, k$

โดยอาศัยกฎความน่าจะเป็นเชิงซ้อน

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_k = \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k)$$

---

[1] Mutually Exclusive

$= \Pr(X_1 = x_1) \Pr(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \Pr(X_3 = x_3 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2)$

$\ldots \Pr(X_k = x_k \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1})$

จะเห็นได้ว่า $\Pr(X_1 = x_1)$ คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A_1 ด้วยความน่าจะเป็น p_1 รวม x_1 ครั้ง ในการทดลองทั้งสิ้น n ครั้ง

$$=> \Pr(X_1 = x_1) = \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n-x_1}$$

เมื่อปรากฏผลการทดลอง (เหตุการณ์) ไป A_1 ครั้ง จำนวนครั้งของการที่เหตุการณ์ที่เหลือ $n - x_1$ ครั้งจึงเป็นจำนวนครั้งของการทดลองที่**อาจ** ปรากฏผลเป็นเหตุการณ์ A_2 หรือนัยหนึ่ง จำนวนการทดลอง $n - x_1$ ครั้ง คือจำนวนครั้งของการทดลองที่**อาจ**ปรากฏผลเป็นเหตุการณ์ A_2 เมื่อพบว่าเหตุการณ์ A_1 จะไม่เกิดขึ้นอีกแล้ว (หรือเหตุการณ์ A_1 เกิดขึ้นไปแล้ว x_1 ครั้ง)

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A_2 จึงเป็น Conditional Probability $\Pr(A_2|\overline{A}_1)$ โดยที่ $\overline{A}_1$ คือส่วนเติมเต็ม (Complement) ของ A_1 ซึ่งก็คือเหตุการณ์อื่น ๆ ที่เหลืออยู่ทั้งหมดคือ

$\overline{A}_1 = \{A_2, A_3, \ldots, A_k\}$

$$=> \quad \Pr(A_2|\overline{A}_1) = \frac{\Pr(A_2 \cap \overline{A}_1)}{\Pr(\overline{A}_1)} = \frac{\Pr(A_2\overline{A}_1)}{\Pr(\overline{A}_1)}$$

แต่ $A_2 \subset \overline{A}_1$ และ $A_2 \cap \overline{A}_1 = A_2$

$$=> \quad \Pr(A_2\overline{A}_1) = \Pr(A_2) = p_2$$

ขณะที่ $\quad \Pr(\overline{A}_1) = 1 - \Pr(A_1) = 1 - p_1$

ดังนั้น $\quad \Pr(A_2|\overline{A}_1) = \dfrac{\Pr(A_2\overline{A}_1)}{\Pr(\overline{A}_1)} = \dfrac{p_2}{1 - p_1}$

ดังนั้น $\quad \Pr(X_2 = x_2|X_1 = x_1) = \binom{n-x_1}{x_2}\left(\dfrac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2}\left(1 - \dfrac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}$

$=> \quad \Pr(X_1 = x_1).\Pr(X_2 = x_2|X_1 = x_1)$

$$= \binom{n}{x_1} p_1^{x_1}(1 - p_1)^{n-x_1}$$

$$.\binom{n-x_1}{x_2}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2}\left(1 - \frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}$$

$$= \frac{n!}{x_1!x_2!(n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1}.p_2^{x_2}(1 - p_1 - p_2)^{n-x_1-x_2}$$

และเมื่อดำเนินการไปเรื่อย ๆ เราจะพบว่า

$$\Pr(X_1 = x_1).\Pr(X_2 = x_2|X_1 = x_1).\Pr(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$...\Pr(X_{k-1} = x_{k-1}|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{k-2} = x_{k-2})$$

$$= \frac{n!}{x_1!x_2!...x_{k-1}!(n - x_1 - x_2 - ... - x_{k-1})!} p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_{k-1}^{x_{k-1}} (1 - p_1 - p_2 - ... - p_{k-1})^{x_{k-1}}$$

เนื่องจากการทดลองกระทำ n ครั้ง ซึ่งมีผลการทดลองเป็น k ลักษณะด้วยความน่าจะเป็น $p_1, p_2, ..., p_k$ โดยที่ $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$ จะเห็นได้ว่า ถ้าทำการทดลองไปแล้ว $(x_1 + x_2 + ... + x_{k-1})$ ครั้งปรากฏผลออกมาเป็น $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ ผลการทดลองสุดท้ายที่เหลืออยู่ $n - x_1 - x_2 - ... - x_{k-1} = x_k$ ครั้ง ย่อมปรากฏเป็น A_k อย่างแน่นอน

ดังนั้น $\Pr(X_k = x_k|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{k-1} = x_{k-1}) = 1$

$$\Rightarrow \quad \Pr(X_1 = x_1)\Pr(X_2 = x_2|X_1 = x_1).\Pr(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2)...\Pr(X_k = x_k|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ... X_{k-1} = x_{k-1})$$

$$= \frac{n!}{x_1!x_2!...x_{k-1}!(n - x_1 - x_2 - ... - x_{k-1})!} p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_{k-1}^{x_{k-1}}(1 \quad p_1 - p_2 - ... - p_{k-1})^{x_{k-1}} \, 1$$

ดังนั้น
$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_{k-1}!x_k!} p_1^{x_1}p_2^{x_2}... p_{k-1}^{x_{k-1}} p_k^{x_k} \qquad ....(2)$$

นิยาม 4.7 ในการทดลองอิสระ n ครั้ง ถ้าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_k$ แทนจำนวนครั้งของการปรากฏผลเป็น $A_1, A_2, ..., A_k$ ตามลำดับ โดยที่ความน่าจะเป็นที่กำหนดใด ๆ จะปรากฏผลเป็น A_i มีค่าเท่ากับ p_i กล่าวคือ $\Pr(A_i) = p_i; i = 1, 2, 3, ..., k , \sum_i^k p_i = 1$ ถ้า x_i คือค่าของตัวแปรสุ่ม X_i แทนจำนวนครั้งที่ปรากฏผลการทดลองเป็น $A_i, i = 1, 2, ..., k; \sum_i^k x_i = n$ แล้ว ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_k$ จะปรากฏดังสมการ (1) หรือ (2) ข้างต้น เรียกการแจกแจงร่วม (Joint Distribution) นี้ว่าการกระจายพหุนาม

ข้อสังเกต

1. การแจกแจงพหุนามนี้ ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_k$ จะไม่เป็นอิสระต่อกัน เพราะเมื่อใดก็ตามที่เราทราบค่าของตัวแปรสุ่ม k − 1 ตัว เราก็จะทราบค่าของตัวแปรสุ่มตัวสุดท้ายที่เหลืออยู่ได้ทันทีทั้งนี้เพราะ $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$ และ $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$

2. ในตำราหลายเล่มนิยมใช้ n_i แทน x_i เมื่อแสดงจำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ A_i; $i = 1, 2, \ldots, k$ โดยมีเหตุผลว่าตัวอักษรที่ใช้แทน**จำนวนครั้ง** นั้นควรจะเป็นตัว n แต่ในที่นี้ใช้เป็น x เพราะเกรงว่าผู้อ่านจะสับสนเพราะเคยใช้ x แทนค่าของตัวแปรสุ่มมาโดยตลอด

3. เหตุที่เรียกการแจกแจงชนิดนี้ว่า "พหุนาม" ก็เพราะการทดลองชนิดนี้ปรากฏผลออกมาได้หลายลักษณะ ต้องกันกับ Multinomial Expansion $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$ และพบว่าเทอมของการแจกแจง $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$ ก็คือความน่าจะเป็นเฉพาะเรื่องของการแจกแจงพหุนาม (เหตุผลเดียวกันกับการแจกแจงทวินาม)

4. กรณีเฉพาะเมื่อ $k = 2$ คือกรณีที่ผลการทดลองปรากฏผลออกมาเพียง $k = 2$ ลักษณะจะพบว่า

$$f_X(x) = \frac{n!}{x_1!x_2!} p_1^{x_1} p_2^{x_2}$$

แต่ $p_1 + p_2 = 1$ และ $x_1 + x_2 = n$ ดังนั้น $p_2 = 1 - p_1$ และ $x_2 = n - x_1$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} p_1^{x_1} p_2^{n-x_1}$$

$$= \binom{n}{x_1} p_1^{x_1}(1-p_1)^{n-x_1}$$

หรือ

$$= \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

แสดงให้เห็นว่าการแจกแจงพหุนามคือกรณีทั่วไปของการแจกแจงแบบทวินาม ขณะเดียวกัน (ดังได้แสดงให้เห็นแล้วในตอนต้น) การแจกแจงทวินามเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงพหุนาม

5. การศึกษาเรื่องใดก็ตามที่ผลของการศึกษาหรือทดลองปรากฏออกมาได้เกินกว่า 2 ลักษณะ สามารถประยุกต์การแจกแจงพหุนามเข้ากับสถานการณ์นั้นได้เสมอ เช่น Goodness of Fit Test Contingency Table หรือ Order Statistics

ทฤษฎี 4.12 ถ้าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_k$ มีการแจกแจงแบบพหุนามแล้ว

$$E(X_i) = np_i, \quad V(X_i) = np_i(1-p_i) \; ; \; i = 1, 2, \ldots, k$$

และ $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$

พิสูจน์

เนื่องจากตัวแปรสุ่ม X_i มีการแจกแจงแบบทวินาม ดังนั้น โดยทฤษฎี 4.3 จึงสรุปได้ว่า $E(X_i) = np_i$ และ $V(X_i) = np_i(1-p_i)$; $i = 1, 2, \ldots, k$

ตัวอย่าง 4.21 จากสถิติการจราจรพบว่า โดยถัวเฉลี่ยแล้วรถยนต์ที่วิ่งไป ณ. สี่แยกไฟแดงแห่งหนึ่งนั้นจะเป็นรถที่เลี้ยวซ้ายทั้งสิ้น 20% เป็นรถที่เลี้ยวขวา 30% ที่เหลืออีก 50% จะไปทางตรง

ก. ถ้ามีรถยนต์วิ่งไป ณ. สี่แยกไฟแดงแห่งนั้น n คัน จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วม (Joint pdf.) ของตัวแปรสุ่ม X_1, X_2, X_3 เมื่อ X_1 แทนจำนวนรถที่เลี้ยวซ้าย X_2 แทนจำนวนรถที่เลี้ยวขวา และ X_3 แทนจำนวนรถที่ไปทางตรง

ข. ถ้ามีรถยนต์วิ่งไปทางสี่แยกแห่งนั้น 60 คัน จงหาความน่าจะเป็นที่รถเหล่านี้จะเลี้ยวซ้าย 10 คัน เลี้ยวขวา 10 คัน อีก 40 คันไปทางตรง พร้อมทั้งคาดหมายจำนวนรถที่วกเลี้ยวซ้ายเลี้ยวขวาและไปทางตรงที่พึงเป็นไปได้

วิธีทำ

ก. X_1 = จำนวนรถยนต์ที่เลี้ยวซ้าย $p_1 = 20\% = 0.2$

X_2 = จำนวนรถยนต์ที่เลี้ยวขวา $p_2 = 30\% = 0.3$

X_3 = จำนวนรถยนต์ที่วิ่งไปทางตรง $p_3 = 50\% = 0.5$

$$n = x_1 + x_2 + x_3 ; \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$\Rightarrow \quad f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}(0.2)^{x_1}(0.3)^{x_2}(0.5)^{x_3}$$

ข. $n = 60,\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.3,\ p_3 = 0.5$

$$\Rightarrow \quad \Pr(X_1 = 10,\ X_2 = 10,\ X_3 = 40) = \frac{60!}{10!10!40!}(0.2)^{10}(0.3)^{10}(0.5)^{40}$$

และเนื่องจาก $E(X_i) = np_i ; i = 1, 2, \ldots . k$

ดังนั้น

$$E(X_1) = np_1 = 60(0.2) = 12$$

$$E(X_2) = np_2 = 60(0.3) = 18$$

$$E(X_3) = np_3 = 60(0.5) = 30$$

นั่นคือ คาดว่าในบรรดารถยนต์ทั้ง 60 คันนั้นจะเลี้ยวซ้าย 12 คันเลี้ยวขวา 18 คันและไปในทางตรง 30 คัน

ตัวอย่าง 4.22 จากกลุ่มตัวอย่างชุดหนึ่งซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่มี pdf เป็น $f_X(x); -\infty < x < \infty$ เมื่อจัดเรียงลำดับตัวอย่างตามขนาดแล้วปรากฏว่าได้ Order Statistics ดังนี้คือ

$$Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$$

ถ้าปรารถนาจะหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Order Statistics ตัวที่ i คือ Y_i ปรากฏว่า

$p_1 = Pr(X \leq y_i) = F(y_i)$, $p_2 = Pr(y_i \leq X \leq y_i + \Delta y_i) = f(y_i)$, $p_3 = Pr(X > y_i)$

$\Rightarrow 1 - Pr(X \leq y_i) = 1 - F(y_i)$

ก. จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Order Statistics Y_i

ข. จากรูปทั่วไปในข้อ ก. จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ $Y_i = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และของ $Y_n = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

วิธีทำ จากกลุ่มตัวอย่างขนาด n

$$p_1 = F(y_i),\ p_2 = f_X(y_i),\ p_3 = 1 - F(y_i)$$

$$x_1 = i - 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = n - i$$

$$\Rightarrow \quad f_{Y_i}(y_i) = Pr(X_1 = i - 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = n - i)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!}\{F(y_i)\}^{i-1}\{1 - F(y_i)\}^{n-i} f_X(y_i)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\{F(y_i)\}^{i-1}\{1 - F(y_i)\}^{n-i} f_X(y_i)\ ;\ -\infty < y_i < \infty$$

ข. $f_{Y_1}(y_1) = ?$ และ $f_{Y_n}(y_n) = ?$

ให้ $i = 1$

$$\Rightarrow \quad f_{Y_1}(y_1) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}\{F(y_1)\}^{1-1}\{1 - F(y_1)\}^{n-1} f_X(y_1)$$

$$= n\{1 - F(y_1)\}^{n-1} f_X(y_1)\ ;\ -\infty < y_1 < \infty$$

ให้ $i = n$

$$\Rightarrow \quad f_{Y_n}(y_n) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}\{F(y_n)\}^{n-1}(1 - F(y_n)\}^{n-n} f_X(y_n)$$

$$= n\{F(y_n)\}^{n-1} f_X(y_n)\ ;\ -\infty < y_n < \infty$$

หมายเหตุ ตัวอย่าง 4.22 เป็นการประยุกต์หลักการของการแจกแจงแบบพหุนามกับ Order Statistics เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหา pdf ของ Order Statistics นอกเหนือไปจากวิธีธรรมดาที่อาศัยวิธีการแปลงรูปตัวแปรสุ่ม (Transformation of R.V.) ซึ่งยุ่งยากซับซ้อน นักศึกษาสามารถนำหลักการนี้ไปหาฟังก์ชั่นร่วมของ Y_i และ Y_j ได้โดยง่ายและจะพบว่า

$$f_{Y_i,Y_j}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\{F(y_i)\}^{i-1}\{F(y_j) - F(y_i)\}^{j-i-1}\cdot$$

$$\cdot\{F(y_j)\}^{n-j} f_X(y_i) f_X(y_j)\ ;\ -\infty < y_i < y_j < \infty$$

สำหรับการนำหลักของการแจกแจงพหุนามไปใช้ในการทดสอบ χ^2 เช่น Goodness of Fit Test และ Contingency Table นักศึกษาจะได้พบเมื่อศึกษาถึงเรื่องนั้น อนึ่งการแจกแจงแบบพหุนามยังนำไปประยุกต์กับการตรวจสอบฟังก์ชั่นของการแจกแจงของข้อมูล (Model Verification) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องของการเปรียบเทียบ Frequency Polygon กับ Model CDF ในเรื่อง Probability Law of Histogram ด้วย แต่จะของดไว้ไม่กล่าวถึงในที่นี้

4.1.9 การแจกแจงผสม (Contagius Distribution หรือ Mixture Distribution หรือ Compound Distribution)

การแจกแจงผสมเป็นหลักการหนึ่งสำหรับหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มตัวใหม่โดยพัฒนาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นใหม่ขึ้นมาจากฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นต่าง ๆ ที่มีอยู่ ทั้งนี้เพราะในหลายกรณีที่สถานการณ์ที่กำลังศึกษาอยู่นั้นไม่อาจอนุโลมเข้าสู่การแจกแจงรูปใดรูปหนึ่งได้ เช่น ในเรื่องของการรอคอย (Discrete Waiting Time) ซึ่งค่า พารามิเตอร์ p จะต้องคงที่เสมอ ไม่ว่าสถานการณ์ข้างเคียงจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและไม่มีข้อจำกัดของตัวแปรเวลา เพียงแต่คอยนับดูว่าในระหว่างที่กำลังศึกษาอยู่นั้นมีปรากฏการณ์ที่สนใจเกิดขึ้นกี่ครั้งเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ในสถานการณ์ดังกล่าว ถ้าหากค่า p มิได้คงที่ดังที่กำหนดไว้ สถานการณ์ของตัวแปรสุ่มย่อมเปลี่ยนแปลงผิดไปจากเดิม ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเดิมจึงไม่อาจใช้ได้อีกต่อไป

หลักการของการแจกแจงผสมจึงเป็นเรื่องของการปรับปรุงฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นเดิมให้เหมาะสมยิ่งขึ้นเมื่อพารามิเตอร์ของฟังก์ชั่นเดิม (ซึ่งโดยปกติต้องเป็นตัวคงที่) มีค่าแปรไปได้ หรือนัยหนึ่ง พารามิเตอร์ของฟังก์ชั่นเดิมกลับทำหน้าที่เป็นตัวแปรสุ่ม

หลักการโดยสรุปของการแจกแจงผสมมีดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มี cdf เป็น $F_X(x; \theta)$ ซึ่งหมายความว่า cdf ของ X มีค่าผันแปรไปตามค่าของพารามิเตอร์ θ ที่เปลี่ยนค่าไปได้ เพื่อให้รับกับสถานการณ์เช่นนี้เราสามารถหา cdf ของตัวแปรสุ่มที่สอดคล้องกับสถานการณ์ที่ θ ทำหน้าที่เสมือนตัวแปรสุ่มได้ดังนี้

$$F_Y(y) = \sum_{\theta} F_X(x; \theta)\, p_\theta(\theta) \quad : \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน}$$

หรือ

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x; \theta)\, p_\theta(\theta) \quad : \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง}$$

ทั้งนี้เพราะถือว่า $F_Y(y)$ เป็นฟังก์ชั่นที่เกิดขึ้นเพราะการรวม $F_X(x)$ ในทุกค่าที่เป็นไปได้ของ θ

$F_Y(y)$ จะเป็น pdf แบบตัดตอนหรือแบบต่อเนื่องขึ้นอยู่กับตัวแปรสุ่ม X ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแปรสุ่มแบบตัดตอน $F_Y(y)$ จะเป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นสะสมแบบตัดตอน ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง $F_Y(y)$ จะเป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นสะสมแบบต่อเนื่อง ในทั้งสองกรณี Domain ของ Y จะเป็น Domain เดียวกันกับ Domain ของ X

และนิยามโมเมนต์ที่ n ไว้ดังนี้

$$E(Y)^n = \sum_{\theta} \mu_X^n p_{\theta}(\theta)$$

หรือ

$$E(Y)^n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X^n p_{\theta}(\theta) d\theta$$

โดยที่ $\mu_X^n = E((X - E(X))^n$ คือ Central Moment ที่ n ของตัวแปรสุ่ม X

ในกรณีที่ต้องการหา pdf ของ Y คือ $f_Y(y)$ ก็สามารถกระทำได้โดยง่ายเพียงแต่แทน $F_X(x;\theta)$ ด้วย $f_X(x;\theta)$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.23 ณ. จุดหนึ่งบนถนนสายหนึ่งมีการขุดถนนเพื่อวางเคเบิลโทรศัพท์ การนี้จะมีเจ้าหน้าที่คนหนึ่งคอยโบกธงแดง-เขียวปิดและปล่อยรถให้วิ่งผ่านเป็นระยะ ๆ โดยปิดถนนครั้งหนึ่ง ๆ นาน t นาที แต่โดยปกติเจ้าหน้าที่อาจปิดถนนครั้งหนึ่งนานไม่เท่ากัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการกะเวลาไม่แม่นยำประการหนึ่งและขึ้นอยู่กับภารกิจของการวางเคเบิลว่าจำเป็นต้องปิดถนนนานเพียงใดอีกประการหนึ่ง

จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของจำนวนรถยนต์ ที่คอยผ่านถนน

วิธีทำ ให้ X = จำนวนรถยนต์ที่คอยผ่านถนน

เมื่อ t มีค่าคงที่ ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงแบบพัวซอง มีพารามิเตอร์ λt เมื่อ λ คืออัตราถัวเฉลี่ยที่รถยนต์จะวิ่งมาถึงจุดที่ขุดถนนใน 1 หน่วยเวลา (สั้น ๆ)

$$\Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \ ; \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

แต่เนื่องจากค่า t ไม่คงที่ แสดงว่าจำนวนรถยนต์ที่คอยผ่านถนนจะมีจำนวนผันแปรไปตามระยะเวลา t นั้น

ดังนั้นระยะเวลาปิดถนน t จึงเป็นตัวแปรสุ่ม สมมุติว่า pdf เป็น $f_T(t)$ และ เนื่องจาก t คือระยะเวลาที่ปิดถนน ซึ่งก็คือระยะเวลาที่รถยนต์ต้องคอยผ่านถนน t จึงเป็นค่าของเวลาที่รอคอย (Contineous Waiting Time) ซึ่งมีการกระจายแบบเอกโพเนนเชียล

$$\Rightarrow \quad f_T(t) = \alpha e^{-\alpha t} \ ; \ t \geq 0$$ เมื่อ α คือระยะเวลาถัวเฉลี่ยที่รถแต่ละคัน

ต้องรอผ่านถนน

ดังนั้น $$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \cdot \alpha e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= \frac{\alpha}{x!}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\alpha)}(\lambda t)^x\,dt$$

ให้ $(A + \alpha)t = u$ ดังนั้น $t = u/(\lambda + a)$; $dt = \frac{1}{\lambda + \alpha}\,du$

$$=> \quad f_X(x) = \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{x!}\int_0^\infty e^{-u}u^x du$$

$$=> \quad = \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^x \cdot \frac{1}{x!}\,\Gamma(x+1)$$

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)^x \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

แสดงว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิต มีพารามิเตอร์ $p = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}$

$$q = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} = \frac{A}{\alpha+\lambda}, \; E(X) = q/p = \lambda/\alpha \text{ และ } V(X) = q/p' = A\,\frac{(\lambda+\alpha)}{a}$$

กรณีเฉพาะ

สมมุติว่า ณ. จุดที่ขุดถนนนั้นมีรถวิ่งผ่านโดยถัวเฉลี่ยนาทีละ $\lambda = 5$ คัน และรถเหล่านี้จะต้องจอดคอยผ่านถนนโดยถัวเฉลี่ยคันละ $\frac{1}{\alpha} = 10$ นาที ดังนั้น

$$f_X(x) = \frac{0.1}{5 + 0.1}\left(\frac{5}{5 + 0.1}\right)^x \; ; \; x = 0, 1, 2, ..$$

จะเห็นได้ว่า $E(X) = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{5}{1/10} = 50 =$ จำนวนรถที่คอยผ่านถนนในการปิดถนนแต่ละครั้ง

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างแสดงให้เห็นวิธีการพัฒนาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นแบบอนุกรมเรขาคณิตอีกวิธีหนึ่ง

ตัวอย่าง 4.24 ในโรงงานแห่งหนึ่งแบ่งการปฏิบัติงานออกเป็นหลายส่วนแต่ละส่วนย่อมต้องการคนงานที่มีพื้นฐานความรู้ความสามารถแตกต่างกัน ดังนั้นคนงานจึงอาจจัดประเภทได้เป็นกลุ่ม ๆ ได้หลายกลุ่มเช่น ประสบการณ์ ประเภทของงาน อายุ และอื่น ๆ

ปรากฏว่าจำนวนอุบัติเหตุที่เกิด แก่คนงานที่ปฏิบัติงานในระยะเวลายาว t หน่วย มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์ $\nu = \lambda t$ (λ = อัตราการเกิดอุบัติเหตุต่อ 1 นาทีหรือหน่วยเวลาสั้น ๆ

และ ν = จำนวนอุบัติเหตุที่ปรากฏขึ้นทั้งหมดในช่วงเวลายาว t หน่วย)

แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาเฉพาะคนงานแต่ละประเภท พบว่าถ้าพารามิเตอร์ ν จะแปรเปลี่ยนไปไม่คงที่เท่ากัน สมมุติว่าพารามิเตอร์ ν มีการกระจายแบบแกมม่า $G(r, \mu)$ นั่นคือ

$$g_N(\nu) = \frac{\mu(\mu\nu)^{r-1}e^{-\mu\nu}}{(r-1)!} \; ; \; \nu \geqslant 0$$

จงแสดงให้เห็นว่า จำนวนอุบัติเหตุ X ที่จะปรากฏขึ้นแก่คนงานกลุ่มใด ๆ ที่ทำงานในช่วงเวลายาว t หน่วย จะมีการแจกแจงแบบนิเสธทวินาม

วิธีทำ ให้ X = จำนวนอุบัติเหตุที่ปรากฏขึ้นในช่วงเวลา t หน่วย

$$=> \quad f_X(x; \nu) = \frac{e^{-\nu}\nu^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$g_N(\nu) = \frac{\mu(\mu\nu)^{r-1}e^{-\mu\nu}}{(r-1)!} \quad ; \quad \nu \geqslant 0$$

$$=> \quad \int_0^\infty f_X(x; \nu)g_N(\nu)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\nu}\nu^x}{x!} \frac{\mu(\mu\nu)^{r-1}e^{-\mu\nu}}{(r-1)!}\, d\nu$$

$$= \frac{\mu^r}{x!(r-1)!} \int_0^\infty \nu^{x+r-1} e^{-(\mu+1)\nu}\, d\nu$$

ให้ $(\mu + 1)\nu = y$ ดังนั้น $\nu = \frac{1}{\mu + 1} \cdot y \quad d\nu = \frac{1}{\mu + 1}\, dy$

$$=> \quad \int_0^\infty f(x; \nu)g(\nu)\, d\nu = \frac{\mu^r}{x!(r-1)!} \frac{1}{(\mu+1)^{x+r}} \int_0^\infty y^{x+r-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\mu^r}{x!(r-1)!} \frac{\Gamma(x+r)}{(\mu+1)^{x+r}}$$

$$= \frac{\mu^r(x+r-1)!}{x!(r-1)!(\mu+1)^x(\mu+1)^r}$$

$$= \frac{(x+r-1)!}{x!(r-1)!} \cdot \frac{\mu^r}{(\mu+1)^r} \frac{1}{(\mu+1)^x}$$

$$=> \quad f_X(x) = \binom{x+r-1}{x}\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^r\left(\frac{1}{\mu+1}\right)^x \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

ดังนั้นตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแทนจำนวนพนักงานกลุ่มใด ๆ จะประสบอุบัติในช่วงเวลายาว t หน่วย มีการแจกแจงแบบนิเสธทวินาม มีพารามิเตอร์ $p = \frac{\mu}{\mu + 1}$

ตัวอย่าง 4.25 ในภูมิภาคหนึ่งแต่ละปีจะมีสัปดาห์ที่มีฝนตกโดยถัวเฉลีย 20 สัปดาห์ (นับสัปดาห์ที่มีฝนไม่ได้นับจำนวนครั้งที่ฝนตก) และในสัปดาห์ดังกล่าวจะมีฝนตกในปริมาณที่มีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลมีปริมาณน้ำฝนเฉลี่ย $\frac{1}{2}$ นิ้ว

จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น (pdf) ของปริมาณน้ำฝนทั้งหมดที่ตกตลอดทั้งปี ถือว่าปริมาณน้ำฝนที่ตกมาแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน และทราบว่าในปีหนึ่งมีฝนตก r สัปดาห์

วิธีทำ ให้ T = ปริมาณน้ำฝนทั้งหมดใน 1 ปี

เนื่องจากปริมาณน้ำฝนที่ตกครั้งหนึ่ง ๆ มีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล ($\lambda = \frac{1}{2}$) และทราบว่าปีหนึ่งมีฝนตก r ครั้ง

ดังนั้นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของปริมาณน้ำฝนรวม T จึงมีการแจกแจงแบบแกมม่า นั่นคือ

$$G(r, \lambda) = f_T(t, r) = \frac{\lambda(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(r)}; \; t > 0, r > 0$$ [1]

แต่เนื่องจากพารามิเตอร์ r คือจำนวนสัปดาห์ (ใน 1 ปี) ที่มีฝนตกซึ่งสามารถแปรเปลี่ยนได้ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม r (เดิมทำหน้าที่เป็นพารามิเตอร์) จึงมีการแจกแจงแบบพัวซอง

$$=> \qquad f_R(r) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!} \; ; \; r = 1, 2, \ldots$$ [2]

ดังนั้นโดยอาศัยความรู้เรื่องเกี่ยวกับการแจกแจงผสม

$$=> \qquad f_T(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(r)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!} \; ; \; t \geq 0$$

ให้ u = r − 1

$$f_T(t) \qquad \sum_{u=0}^{\infty} = \frac{\lambda(\lambda t)^u e^{-\lambda t}}{\Gamma(u+1)} \frac{e^{-v} v^{u+1}}{(u+1)!}$$

นั่นคือ

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t - v} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^u v^{u+1}}{\Gamma(u+2) u!} \; ; \; t \geq 0$$ [3]

---

[1] หรือ $f_T(t; r) = \frac{\lambda^r t^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda t} \; ; \; t > 0$

[2] ยอมให้มีข้อผิดพลาดใน Model ได้บ้าง ทั้ง ๆ ที่มีขีดจำกัดบนของจำนวนสัปดาห์ หมายความว่า ตามความเป็นจริงแล้ว r จะวิ่งจาก 0 ถึง 52 แต่โดยข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการกระจายพัวซองไม่มีขีดจำกัด

[3] จากนิยาม $\Gamma(n) = (n-1)!$ ดังนั้น $\Gamma(u+1)(u+1)! = u!\Gamma(u+2)$

4.2 การแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

(Contineous Univeriate Distribution)

ในปัญหาทางปฏิบัติหลายประการเราไม่อาจนับจำนวนเหตุการณ์หรือปรากฏการณ์ออกมาเป็นเลขจำนวนเต็มหรือจำนวนนับได้ แม้แต่จะพยายามนับได้ก็ไม่อาจเชื่อถือในผลของการนับ ทั้งนี้เพราะค่าของตัวแปรมิใช่จำนวนแบบตัดตอน แต่เป็นจำนวนที่ต่อเนื่องกันไปไม่ขาดสาย เช่น เวลา อัตราการไหลของน้ำ (Flow Rate) ปริมาตรของแกสหรือของเหลว ฯลฯ เช่นอัตราการไหลของน้ำอาจเป็น 1,000 ลบ.ฟ./วินาที หรือ 1,000.001 ลบ.ฟ./วินาที หรือ 1,000.000001 ลบ.ฟ./วินาที ดังนี้เป็นต้น เมื่อค่าของตัวแปรสุ่มมีลักษณะต่อเนื่องกันเช่นนี้ ลักษณะฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มดังกล่าวจึงแตกต่างไปจากลักษณะที่เคยพบในตอน 4.1 โดยสิ้นเชิง

โดยปกติเราจะถือว่าค่าของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องเป็นค่าต่าง ๆ บนเส้นตรง (Real Line) แต่จะมีขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างอยู่ ณ. จำนวนใดขึ้นอยู่กับสถานการณ์ของตัวแปรแต่ละชนิด สมมุติ X เป็นตัวแปรสุ่มที่กำลังศึกษา ค่าของ X คือ x อาจอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง เช่น X เป็นตัวแปรสุ่มแบบปกติ (Normal Variate) ค่าของ X จะมีค่าได้ในทุกค่าที่เป็นไปได้คือ $-\infty < x < \infty$ หรือ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบแกมม่า ค่าของ X จะมีเฉพาะจำนวนบวกคือ $x \geqslant 0$ หรือ $0 < x < \infty$ หรือ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเบต้า ค่าของ X อาจมีค่าระหว่างจำนวนใด ๆ ก็คือ $a < x < b$ เมื่อ $a < b$ และ a, b เป็นจำนวนใด ๆ กรณีเฉพาะที่สำคัญของตัวแปรสุ่มเบต้าคือกรณีที่ $a = 0, b = 1$

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่สำคัญคือการแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมม่า และการแจกแจงแบบเบต้า การแจกแจงแบบอื่นนอกเหนือไปจากนี้ส่วนใหญ่จะพัฒนาขึ้นมาจากการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบนี้ อาจพัฒนาขึ้นมาในรูปของฟังก์ชั่นของตัวแปรสุ่ม (Function of Random Variables) หรือพัฒนาขึ้นมาในรูปของกรณีเฉพาะ เช่นการแจกแจงแบบ χ^2, χ, t, F Rayleigh, Maxwell และอื่น ๆ พัฒนาขึ้นมาจากการแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล และ χ^2 เป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Rectangular Distribution) การแจกแจงแบบสามเหลี่ยม (Triangular Distribution) เป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบเบต้า ดังนี้เป็นต้น ในการติดตามศึกษาขอให้นักศึกษาจดจำและทำความเข้าใจในการแจกแจงของตัวแปรสุ่มหลักเหล่านี้ให้ดี เพราะจะเป็นการประหยัดเวลาในการศึกษาไปได้มาก ทั้งยังก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจได้อย่างลึกซึ้งอีกด้วย

ลักษณะที่สำคัญของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่องคือ

1. $f_X(x) \geqslant 0$ หรือค่าของความน่าจะเป็นต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ หรือพื้นที่ใต้โค้ง $f_X(x)$ ในช่วงที่กำหนดต้องมีค่ารวมเท่ากับ 1

3. $\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = F_X(x)$ ในทุกค่าของ x หรือ $\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$; $-\infty < x < \infty$

อนึ่งขอให้สังเกตุว่า การที่เสนอค่าของ x หรืออินทรีเกรต $f_X(x)$ ระหว่างค่า $(-\infty, \infty)$ นั้น มิได้หมายความว่าค่าของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องจะต้องอยู่ระหว่าง $-\infty$ ถึง ∞ เสมอไป ที่เขียนไว้เช่นนี้เป็นการเขียนแสดงให้เห็นถึงลักษณะทั่ว ๆ ไปเท่านั้น ความจริงค่าของ x จะอยู่ระหว่างค่าใดนั้นขึ้นอยู่กับสถานการณ์จำเพาะตัวของตัวแปรสุ่มแต่ละชนิดเป็นอย่าง ๆ ไปนักศึกษาจะได้ศึกษาถึงการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่สำคัญโดยละเอียดในตอนต่อไปนี้

4.2.1 การกระจายแบบเอกโพเนนเชียล (Exponential Distribution)

การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่แสดงระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ (Time Between Event) เมื่อสิ่งที่มุ่งศึกษานั้นหมายถึง "เหตุการณ์" หรือแสดงอายุการใช้งาน (Life Time) ของวัตถุสิ่งของเมื่อสิ่งที่มุ่งศึกษาหมายถึง "อายุ"

พูดเช่นนี้อาจทำให้ผู้อ่านค่อนข้างสับสนได้ ผู้เขียนมีเจตนาเพียงเพื่อแสดงให้เห็นว่าเราสามารถประยุกต์การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลไปในสถานการณ์เช่นใดได้บ้างเท่านั้น ทั้งนี้เพราะได้พบเห็นมาบ่อยครั้งว่านักศึกษาคุ้นเคยกับเฉพาะคำที่ว่า "เหตุการณ์" หรือ "อายุใช้งาน" อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เมื่อเปลี่ยนแปลงประเด็นของการศึกษาไปในลักษณะอื่นก็เริ่มงุนงงสับสน มองภาพไม่ออก

คำว่า "เหตุการณ์" ที่กล่าวถึงในตอนต้นอาจหมายถึงอะไรก็ได้ เช่น ระยะเวลาการพูดโทรศัพท์ ระยะเวลาที่รถคอยผ่านสัญญาณไฟแดง ระยะเวลาที่รถบรรทุกเสียไปในด่านชั่งน้ำหนัก ระยะเวลาทิ้งห่างระหว่างรถแต่ละคันที่วิ่งผ่านจุดใดจุดหนึ่ง (ระยะเวลาทิ้งห่างระหว่างรถแต่ละคันที่ผ่านจุด ๆ หนึ่ง อาจเป็นสี่แยกไฟแดง ด่านตรวจความเร็ว หลักกิโลเมตร ฯลฯ ถ้ายิ่งสั้น ความหนาแน่นของการจราจรก็ยิ่งสูง ถ้าช่วงทิ้งห่างยาวขึ้น ความหนาแน่นของการจราจรก็เบาบาง) ระยะเวลาที่คนไข้แต่ละคนรอคอยเข้ารับบริการตรวจรักษาจากแพทย์ ระยะเวลาที่โมเลกุลใด ๆ ของน้ำที่จะอยู่ในถังเก็บน้ำ เมื่อมีการสูบน้ำเข้าถังและจ่ายน้ำไปตามท่ออยู่ตลอดเวลา ฯลฯ เหล่านี้ล้วนเป็นตัวอย่างที่แสดงสถานการณ์ของการศึกษาเมื่อประเด็นที่มุ่งศึกษาหมายถึงเหตุการณ์ จะเห็นได้ว่า "เวลาระหว่างเหตุการณ์" หมายถึง ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ทำนองเดียวกันที่เกิดขึ้นแล้วกับเหตุการณ์ที่กำลังจะเกิดขึ้นอีก ส่วนอายุใช้งานที่กล่าวถึงหมายถึง ความทนทานของวัตถุสิ่งของโดยวัดด้วยเวลาตั้งแต่เริ่มใช้ $(t = 0)$ จนกระทั่งวัตถุนั้นเสียหรือเสื่อมสภาพ $(t = t)$ เช่น อายุใช้งานของทรานซิสเตอร์ อายุใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าและอุปกรณ์ไฟฟ้าต่าง ๆ อายุใช้งานของวัสดุสิ้นเปลืองและวัสดุยาวนานต่าง ๆ เช่น ชิ้นส่วนอะไหล่รถยนต์ เครื่องบินและอื่น ๆ เป็นต้น

จากที่กล่าวมาทั้งหมดจึงเห็นได้ว่า ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลโดยส่วนใหญ่เป็นเรื่องของตัวแปรเวลา T (Time Vairable) มากกว่าอย่างอื่น ๆ (ตัวอย่างอื่นคือแรงสั่นสะเทือน (Richter Maxnitude) ของแผ่นดินไหว) ที่เริ่มต้นนับเมื่อเริ่มใช้วัตถุ (กรณีอายุใช้งาน) หรือเริ่มนับเมื่อปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันได้เกิดขึ้นเสร็จสิ้นไปแล้ว เวลาดังกล่าวจะนับติดต่อกันไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งปรากฏการณ์ที่รอคอยนั้นอุบัติขึ้นอีก

ณ. จุดนี้จึงสามารถให้ข้อสรุปเกี่ยวกับลักษณะของการแจกแจงเอกโพเนนเชียลได้เป็น 4 ประการ

1. การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลเป็นการศึกษาถึงระยะเวลาที่รอคอย (Continеous Waiting Time) จนกระทั่งเกิดปรากฏการณ์ที่มุ่งศึกษาเป็นครั้งแรก

2. การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลมีความเกี่ยวพันกับการแจกแจงแบบพัวซองอย่างลึกซึ้ง กล่าวคือ การแจกแจงแบบพัวซองศึกษาถึงจำนวนครั้ง (เฝ้านับ) ของการเกิดอุบัติการณ์ที่มุ่งศึกษาในช่วงเวลา (ระยะทาง พื้นที่ ปริมาตร จุด) ที่แน่นอนช่วงหนึ่ง ส่วนการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลถือว่าเวลาเป็นตัวแปร (ไม่คงที่เช่นกรณีพัวซอง) และนับเวลาหรือบันทึกเวลาติดต่อกันไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งเกิดอุบัติการณ์พัวซองเป็นครั้งแรก (Occurrence of Poisson Event) (เฝ้าคอย) อย่างไรก็ตาม เวลาอาจไม่จำเป็นต้องเริ่มที่ 0 เสมอไป ณ. จุดนี้เราจึงเห็นได้ว่าการแจกแจงทั้งสองแบบมีลักษณะร่วมกันคือเฝ้านับปรากฏการณ์ที่จะอุบัติขึ้นโดยสุ่ม (Random Occurrence)

3. การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลเป็นอีกโฉมหน้าหนึ่งของการแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิต เพียงแต่การแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิตศึกษาถึงสถานการณ์ของตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน ส่วนการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลศึกษาถึงสถานการณ์ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

4. ฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลพัฒนาขึ้นมาจากความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติการณ์พัวซองเป็นครั้งแรกดังนี้

ให้ตัวแปรสุ่ม T = ช่วงเวลาที่ต้องรอคอยจนกระทั่งเกิดอุบัติการณ์พัวซองเป็นครั้งแรก

X = จำนวนครั้งของการเกิดปรากฏการณ์ที่อุบัติขึ้นในช่วงเวลา $(0, t)$ ของกระบวนการพัวซอง

ดังนั้น $Pr(T > t)$ [1] จึงหมายถึงความน่าจะเป็น ที่ยังไม่เกิดอุบัติการณ์พัวซองใดในช่วงเวลายาว t หน่วย

[1] $Pr(T > t)$ เรียกว่า Reliability หมายถึงโอกาสที่วัตถุยังคงใช้งานต่อไปได้เมื่อใช้มาแล้วถึง t หน่วยเวลา (หรือยังไม่เสื่อมสภาพเมื่อใช้ถึง t หน่วยเวลา) เช่น หลอดไฟมีอายุใช้งานโดยเฉลี่ย 300 ชั่วโมง $Pr(T > 300)$ จะหมายถึงความน่าจะเป็นที่หลอดไฟจะมีอายุยืนยาวกว่าอายุเฉลี่ย (เพราะใช้มา 300 ชั่วโมงก็ยังไม่ขาด) หรือความน่าจะเป็นที่หลอดไฟจะยังคงใช้ได้เป็นปกติเมื่อผ่านการใช้มาแล้ว 300 ชั่วโมง หรือความน่าจะเป็นที่หลอดไฟจะยังไม่ขาดในช่วงเวลา (0, 300)

0 t T

$\Rightarrow \quad \Pr(T > t) = \Pr$ (ไม่เกิดอุบัติการณ์พัวซองในช่วงเวลายาว t หน่วย)

$= \Pr(X = 0)$

$$\Rightarrow \quad \Pr(T > t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} : t \geqslant 0,$$

λ = อัตราถัวเฉลี่ยของการเกิดอุบัติการณ์ต่อ 1 หน่วยเวลา

$$\Rightarrow \quad 1 - \Pr(T6\ \ t) = e^{-\lambda t} \qquad : t \geqslant 0$$

$$1 - F_T(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad F_T(t) = \Pr(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d}{dt} F,(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda t})$$

$$\Rightarrow \quad f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad : t > 0$$

นั่นคือ $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $t \geqslant 0$ คือฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติการณ์พัวซองเป็นครั้งแรกในช่วงเวลาขนาดความยาว t หน่วย เมื่อ λ คืออัตราถัวเฉลี่ยของจำนวนอุบัติการณ์ที่จะเกิดขึ้นใน 1 หน่วยเวลา (λ ในที่นี้มีความหมายเช่นเดียวกันกับ λ ในการแจกแจงแบบพัวซองเมื่อนำมาศึกษาในแง่ของเอกโพเนนเชียล จึงหมายถึงระยะเวลาถัวเฉลี่ยระหว่างเหตุการณ์หรืออัตราการเสื่อมสภาพของวัตถุต่อหน่วยเวลา (Time Between Event หรือ Failure Rate) ทั้งนี้แล้วแต่ว่าสถานการณ์ที่กำลังศึกษาอยู่นั้นเป็น "เหตุการณ์" หรือ "อายุการใช้งาน")

นิยาม 4.8 ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล ถ้า X มี pdf ดังนี้คือ

$$EX(\lambda) = f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad \text{เมื่อ } x \geqslant 0$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น}$$

ข้อสังเกต โดยปกตินิยมใช้ T เป็นตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลหรือตัวแปรสุ่มใดก็ตามที่เกี่ยวข้องกับเวลา แต่ในที่นี้ใช้ X เพราะเคยใช้ X ในความหมายของตัวแปรสุ่มมาโดยตลอด แต่เรามีสิทธิ์ที่จะใช้อักษรตัวใดแทนตัวแปรสุ่มก็ได้ ขอเพียงแต่ให้เข้าใจว่าอักษรตัวนั้น หมายถึงอายุใช้งานหรือระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์หรืออื่น ๆ ตามความที่อธิบายแล้วก็คงไม่มีปัญหาอะไร

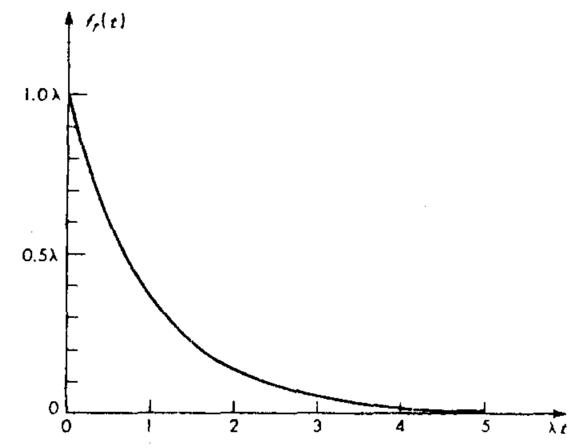
ทฤษฎี 4.13 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลแล้ว X จะมี mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \; ; \; t < \lambda, E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{และ } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

พิสูจน์ ทฤษฎีนี้ได้เคยพิสูจน์ให้เห็นมาแล้วในตัวอย่างที่ 3.5 อย่างไรก็ตามจะชี้ให้เห็นอีกครั้งหนึ่งในภายหลังเมื่อศึกษาถึงการแจกแจงแบบแกมม่า ในกรณีเฉพาะเมื่อ $r = 1$ (r คือพารามิเตอร์ตัวหนึ่งของตัวแปรสุ่มแบบแกมม่า)

ข้อสังเกต ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\lambda}$ แสดงว่า E(X) มีค่าเท่ากับส่วนกลับ (Inverse) ของอัตราการเสื่อมสภาพของวัตถุหรือระยะเวลาถัวเฉลี่ย เช่นอายุของหลอดสูญญากาศมีค่าเท่ากับ 100 ชั่วโมง ($\frac{1}{\lambda}$) แสดงว่าอัตราการเสื่อมสภาพ (λ) ของหลอดสูญญากาศมีค่าเท่ากับ .01 หน่วยต่อชั่วโมง (หรือหลอดสูญญากาศจะค่อย ๆ เสื่อมสภาพไป .01 หน่วยในทุกชั่วโมงที่ใช้งาน) หรือนายแพทย์ให้บริการรักษาคนไข้โดยเฉลี่ย ($\frac{1}{\lambda}$) ชั่วโมงละ 5 คน แสดงว่าคนไข้คนหนึ่งได้รับบริการจากแพทย์โดยถัวเฉลี่ย (λ) คนละ 20 นาที

เนื่องจากในกระบวนการพัวซอง (Poisson Process) มีข้อตกลงว่าอุบัติการณ์ที่ปรากฏในแต่ละช่วงเวลาเป็นอิสระต่อกัน นั่นหมายความว่าปรากฏการณ์ที่จะอุบัติในอนาคตเป็นอิสระกับการเกิดปรากฏการณ์ในอดีตและปัจจุบัน ลักษณะนี้เรียกว่า Memoryless Property และโดยเหตุที่การแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงแบบพัวซองอย่างใกล้ชิด (ดูข้อสรุปที่ 4) ดังนั้นการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลจึงมีคุณสมบัตินี้ด้วย ภาพของ pdf ของการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลปรากฏดังนี้



Exponential distribution EX(λ).

ทฤษฎี 4.14 ตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลมีคุณสมบัติ Memoryless นั่นคือ

ถ้า X = ระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์หรืออายุใช้งานของวัตถุแล้ว

$$\Pr(X \leqslant t | X > t_0) = \Pr(X \leqslant t - t_0)$$

พิสูจน์

0 $\quad t_0 \quad t \quad$ X

$$
\begin{aligned}
F_{X|X>t_0}(t) &= \Pr(X \leqslant t | X > t_0) \\
&= \frac{\Pr(X\ 6\ t) \cap (X > t_0)}{\Pr(X > t_0)} \\
&= \frac{\Pr(t_0 < X \leqslant t)}{\Pr(X > t_0)} \qquad \because t \geqslant t_0 \\
&= \frac{F_X(t) - F_X(t_0)}{1 - F_X(t_0)} \\
&= \frac{(1 - e^{-\lambda t}) - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} \qquad \text{; ข้อสรุปที่ 4} \\
&= \frac{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} \\
&= 1 - e^{-\lambda(t - t_0)} \qquad ; t \geqslant t_0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} F_{X|X>t_0}(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{\lambda(t - t_0)}) = \lambda e^{-\lambda(t - t_0)} ; t \geqslant t_0$$

$$\Rightarrow \qquad f_{X|X>t_0}(t) = \lambda e^{-\lambda(t - t_0)} ; t \geqslant t_0$$

---

[1] ถ้า X หมายถึงอายุใช้งานของวัตถุจะมองเห็นภาพได้ชัดเจน $\Pr(X \leqslant t | X > t_0) = \Pr(X \leqslant t - t_0)$ หมายความว่าเมื่อวัตถุใช้งานมาแล้ว t_0 หน่วยเวลาแต่ยังไม่เสื่อมสภาพ แสดงว่าวัตถุคงจะเสื่อมสภาพในช่วงเวลาที่เหลืออยู่คือ $(t - t_0)$ ทั้งนี้หมายความว่าการพิจารณาอายุใช้งานของวัตถุเราจะไม่สนใจเวลาใช้งานที่ผ่านมาแล้ว หรือถือว่าตราบใดที่วัตถุนั้นยังคงใช้งานได้ก็ถือเสมือนว่าวัตถุนั้นเป็นของใหม่อยู่เสมอ เช่นตราบใดที่ฟิวส์ยังคงใช้ได้ (ยังไม่ละลาย) แม้จะได้ใช้มานานแล้ว t_0 ชั่วโมง เราก็ถือว่าฟิวส์นั้นยังใช้ได้ดีเหมือนของใหม่ พฤติกรรมการเสื่อมสภาพของวัตถุจึงมิได้ขึ้นอยู่กับเวลาที่ได้ใช้งานมาแล้วนานเพียงใดแต่ขึ้นอยู่กับระยะเวลาการใช้งานแต่ละครั้งในภายหน้าว่าจะใช้ติดต่อกันไปนาน (หักโหม) เพียงใด

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่วัตถุจะเสื่อมสภาพเมื่อใช้งานมาแล้ว t_0 หน่วยเวลา คือความน่าจะเป็นที่วัตถุจะเสื่อมสภาพในช่วงเวลาภายหน้า (ดูคำอธิบายเชิงอรรถท้ายทฤษฎี 4.14)

ตัวอย่าง 4.26 คอนเดนเซอร์ขนาดหนึ่งมีอายุใช้งานโดยเฉลี่ย 100 ชั่วโมง ถ้าพบว่าเมื่อใช้งานผ่านไปแล้ว t ชั่วโมง 90% ของคอนเดนเซอร์เหล่านั้นยังคงใช้งานได้ดี อยากทราบว่าคอนเดนเซอร์ถูกใช้งานมาแล้วกี่ชั่วโมง (t = ?)

วิธีทำ เมื่อใช้งานมาแล้ว t ชั่วโมงร้อยละ 90 ของคอนเดนเซอร์ยังคงทำงานได้ดี

$$\Rightarrow \quad Pr(X > t) = .90$$

$$Pr(X > t) = 1 - Pr(X \le t) = e^{-\lambda t}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 100$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 0.01$$

$$\Rightarrow \quad e^{-0.01t} = .90$$

$$\ln(.90) = -0.01t$$

$$\Rightarrow \quad t = -100 \ln(.90)$$

$$= 10.54$$

แสดงว่าคอนเดนเซอร์เหล่านั้นเพิ่งใช้งานมาเพียง **10.54** ชั่วโมง

ตัวอย่าง 4.27 นำหลอดอีเลคโทรนิคส์ n หลอดมาใช้งาน (เป็นอิสระต่อกัน) และทราบว่าหลอดชนิดดังกล่าวมีอายุใช้งานเฉลี่ย 200 ชั่วโมง ถ้าใช้งานไปแล้ว t ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยครึ่งหนึ่งของหลอดดังกล่าวยังคงทำงานได้เป็นปกติ

วิธีทำ ให้ X = อายุใช้งานของหลอดอีเลคโทรนิคส์

ดังนั้น

q = Pr (หลอดเสื่อมสภาพในระหว่าง (0, t) ชั่วโมง) = $Pr(X \leqslant t)$

$= F_X(t)$

$= 1 - (.005e^{-.005t})$

p = Pr (หลอดยังคงใช้งานได้ดีเมื่อใช้ไปแล้ว t ชั่วโมง) = $Pr(X > t)$

$= 1 - F_X(t)$

$= .005e^{-.005t}$

การที่หลอดจะเสื่อมสภาพนั้น การเสื่อมสภาพอาจปรากฏกับหลอดใด ๆ ก็ได้ ดังนั้นจากหลอดทั้งสิ้น n หลอด การที่หลอดยังคงทำงานได้เป็นปกติถึง k หลอด จึงปรากฏขึ้นได้ถึง $\binom{n}{k}$ วิธี ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยครึ่งหนึ่งของหลอดทั้งสิ้น n หลอดยังคงทำงานได้จึงมีค่าดังนี้

$$\sum_{k=n/2}^{n} \binom{n}{k}(.005e^{-.005t})^k(1-.005e^{-.005t})^{n-k} \text{ ; เมื่อ n เป็นเลขคู่}$$

และ

$$\sum_{k=n+1/2}^{n} \binom{n}{k}(.005e^{-.005t})^k(1-.005e^{-.005t})^{n-k} \text{ ; เมื่อ n เป็นเลขคี่}$$

ตัวอย่าง 4.28 นำอุปกรณ์อิเลคโทรนิคส์ต่อไปนี้ต่อเข้าวงจรไฟฟ้า คือ ซิลิคอนไดโอดชนิดใช้งานเฉลี่ย 500,000 ชั่วโมง (อัตราเสื่อมสภาพคงที่เท่ากับ 0.000002) 10 ตัว ซิลิคอนทรานซิสเตอร์ชนิดอายุใช้งานเฉลี่ย 100,000 ชั่วโมง (อัตราเสื่อมสภาพคงที่เท่ากับ 0.000001) 4 ตัว คอนเดนเซอร์ชนิดอายุใช้งานเฉลี่ย 500,000 ชั่วโมง (อัตราเสื่อมสภาพคงที่เท่ากับ 0.000002) 10 ตัว และตัวต้านทานชนิดอายุใช้งานเฉลี่ย 1,000,000 ชั่วโมง (อัตราเสื่อมสภาพคงที่เท่ากับ 0.000001) 20 ตัว

การต่ออุปกรณ์ดังกล่าวเป็นการต่อแบบอนุกรม และต่างก็ทำงานอย่างเป็นอิสระต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นที่วงจรนี้ยังคงทำงานได้เป็นปกติเมื่อผ่านการใช้งานไปแล้ว t ชั่วโมง พร้อมทั้งคาดหมายอายุใช้งานของวงจรดังกล่าว

วิธีทำ ให้ T = อายุใช้งานของวงจรไฟฟ้า

ให้ T_i = อายุใช้งานของอุปกรณ์อิเลคโทรนิคส์ตัวที่ i ; i = 1, 2, ..., 44

เนื่องจากวงจรนี้เป็นวงจรอนุกรม ดังนั้นวงจรจะยังคงทำงานได้ก็ต่อเมื่ออุปกรณ์อีเลคโทรนิคส์ทุกตัวยังคงทำงานได้

$$\Rightarrow \quad \Pr(T>t) = \Pr(T_1>t \text{ และ } T_2>t \text{ และ...และ } T_{44}>t)$$

$$= \Pr(T_1>t)\Pr(T_2>t)\ldots\Pr(T_{44}>t)$$

$$\because \quad \Pr(T_i>t) = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \Pr(T>t) = e^{-10(.000002)t}\,e^{-4(.000001)t}.e^{-10(.000002)t}.e^{-20(.000001)t}$$

$$\Rightarrow \quad \Pr(T>t) = e^{-.0001t}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่วงจรนี้จะยังคงทำงานได้เป็นปกติเมื่อใช้งานมาแล้ว t ชั่วโมง มีค่าเท่ากับ $e^{-.0001t}$

เช่น ความน่าจะเป็นที่วงจรยังคงทำงานได้เป็นปกติเมื่อใช้งานมาแล้ว 10 ชั่วโมงคือ $e^{-.0001(10)}$ หรือ

$$Pr(T > t) \quad = \quad e^{-.0001(10)} = .999$$

หมายความว่า เมื่อวงจรถูกใช้งานไปแล้ว 10 ชั่วโมง 99.9% ของอุปกรณ์ไฟฟ้าจะยังคงทำงานได้ดีต่อไป

พิจารณา $Pr(T > t) = e^{-.0001t}$

$=> 1 \quad Pr(T \leqslant t) = e^{-.0001t}$

$Pr(T \leqslant t) = 1 - e^{-.0001t}$

หรือ

$=> \quad f_T(t) = .0001e^{-.0001t} \; ; \quad t \geqslant 0$

จะเห็นได้ว่า $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{.0001} = 10{,}000$ ชั่วโมง

นั่นคือวงจรไฟฟ้านี้มีอายุใช้งานโดยเฉลี่ยได้นานถึง 10,000 ชั่วโมง

ตัวอย่าง 4.29 อายุใช้งานของหลอดภาพโทรทัศน์มีอายุใช้งานโดยเฉลี่ยได้นานถึง 1,000 ชั่วโมง จงคำนวณหา

ก. ความน่าจะเป็นที่หลอดภาพจะมีอายุใช้งานนานเกินกว่า 1,000 ชั่วโมง

ข. ความน่าจะเป็นที่หลอดภาพจะมีอายุใช้งานได้ในระหว่าง 700 ถึง 1,000 ชั่วโมง

ค. ความน่าจะเป็นที่หลอดภาพยังคงใช้งานได้เกินกว่าชั่วโมงที่ 1,200 เมื่อผ่านการใช้งานมาแล้ว 800 ชั่วโมง

วิธีทำ

ให้ X = อายุใช้งานของหลอดภาพโทรทัศน์

$=> \quad X \sim EX(\lambda = 0.001)$

ก. ความน่าจะเป็นที่หลอดภาพจะมีอายุใช้งานนานเกินกว่า 1,000 ชั่วโมง

$$\Pr(X > 1{,}000) = \int_{1000}^{\infty} (.001)e^{-.001x}\, dx$$

หรือ $= e^{-(0.001)(1{,}000)}$

e^{-1}

$= .36788$ (ตาราง A.2)[1]

ข. ความน่าจะเป็นที่หลอดภาพจะมีอายุใช้งานระหว่าง 700 ถึง 1,000 ชั่วโมง

$$\begin{aligned}\Pr(700 \leqslant X \leqslant 1{,}000) &= \Pr(X \leqslant 1{,}000) - \Pr(X \leqslant 700) \\ &= (1 - e^{-(.001)(1{,}000)}) - (1 - e^{-(.001)(700)}) \\ &= (1 - .36788) - (1 - .49659) \quad \text{(ตาราง A.2)} \\ &= .12871\end{aligned}$$

ค. ความน่าจะเป็นที่หลอดภาพจะมีอายุใช้งานได้นานเกินกว่าชั่วโมงที่ 1,200 เมื่อผ่านมาแล้ว 800 ชั่วโมง

$\Pr(X > 1{,}200 | X > 800) = \ ?$ [2]

$$\begin{aligned}\Pr(X > 1{,}200 | X > 800) &= \Pr(X > 1{,}200 - 800) \\ &= \Pr(X > 400) \\ &= e^{-(.001)(400)} \\ &= .67032\end{aligned}$$

4.2.2 การแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution)

การแจกแจงแบบแกมม่าเป็นโมเดล (Model) ที่ใช้ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของระยะเวลาระหว่างเหตุการณ์ตั้งแต่ r, ($r \geqslant 2$) เหตุการณ์ขึ้นไป (Time to the r^{th} Event)

ขอให้นักศึกษาย้อนไปพิจารณาการแจกแจงเอกโพเนนเชียลในตอนก่อน จะเห็นว่าเป็นเรื่องของการศึกษาความผันผวนของเวลาระหว่างเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ในกระบวนการพัวซอง เช่นระยะเวลาระหว่างอุบัติเหตุ 2 ครั้ง ณ. จุดสี่แยกไฟแดง ระยะเวลาระหว่างการเกิดพายุใต้ฝุ่นขนาดความเร็วลม a ไมล์ต่อชั่วโมง (a อาจเป็นค่าใดก็ได้ แล้วแต่ความสนใจของผู้ศึกษา) หรือ

---

[1] ดูวิธีใช้ตารางจากตัวอย่างที่ 4.31

[2] เป็นเรื่องของ Memoryless Property ขอให้พิจารณาเปรียบเทียบกับตัวทฤษฎีให้ดี ณ. จุดนี้นักศึกษาจะพบว่า $\Pr(X \leqslant t | X > t_0) = \Pr(X \leqslant t - t_0)$ ขณะเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\Pr(X > t | X > t_0) = \Pr(X > t - t_0)$