ระยะเวลารอคอยจนกระทั่งเครื่องคำนวณไฟฟ้าที่ติดตั้งใหม่เริ่มรวนเป็นต้น ถ้าพิจารณาเฉพาะในแง่อายุการใช้งานจะพบว่า อุบัติการณ์จะมีได้เพียงครั้งหนึ่งครั้งเดียว (ครั้งแรก) เท่านั้น เช่นคอยจนกระทั่งหลอดไฟขาด ซึ่งโดยทั่วไปก็มีได้เพียงครั้งเดียว ที่ต้องให้ย้อนมาพิจารณาเรื่องนี้ก็ด้วยเกรงว่านักศึกษาจะเข้าใจว่า การแจกแจงแบบแกมม่าจะหมายถึงอายุการใช้งานของวัตถุด้วย เพราะเคยกล่าวถึงมาแล้วในตอนที่ว่าด้วยการแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิตและการกระจายแบบนิเสธทวินามว่ามีส่วนคล้ายคลึง (เป็นอีกโฉมหน้าหนึ่งของกันและกัน) กับการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลและการแจกแจงแบบแกมม่าตามลำดับ โดยหมายถึงเวลารอคอยด้วยกันทั้ง 4 ตัวแปร เพียงแต่การแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิตเป็นเรื่องของการรอคอย (Discrete Waiting Time) จนกระทั่งปรากฏเหตุการณ์ที่สนใจเป็นครั้งแรก (ขอให้สังเกตุไว้ด้วยว่าการแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิตก็มี Memoryless property เช่นเดียวกับการแจกแจงแบบเอกโพ-เนนเชียล) โดยที่การนับอาจจะดำเนินการนับจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ที่สนใจ เช่น การรอคอยจนกระทั่งเจาะพบน้ำมันในอ่าวไทยเป็นครั้งแรก การรอคอยเราจะนับที่จำนวนครั้งของการขุดเจาะที่ไม่พบน้ำมัน ส่วนการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียลเป็นเรื่องของเวลาที่ใช้รอคอย (Contineous Waiting Time) จนกระทั่งเกิดอุบัติการณ์พัวซองที่สนใจ ขณะที่การแจกแจงแบบนิเสธทวินามเป็นเรื่องของการรอคอยจนพบเหตุการณ์ที่มุ่งสนใจครบ r ครั้ง และการแจกแจงแบบแกมม่าก็ศึกษาในประเด็นเดียวกัน แต่มุ่งศึกษาถึงจำนวนเวลาที่ใช้ไปในการรอคอยนั้น ดังนี้จึงเห็นได้ว่า โดยปกติเมื่อกล่าวถึงการแจกแจงแบบแกมม่าแล้วเราจะไม่พูดถึงอายุการใช้งานของวัตถุ เว้นแต่จะมีข้อกำหนดเป็นอย่างอื่น เพราะโดยทั่วไปวัตถุจะไม่เสื่อมคุณภาพเกินกว่า 1 ครั้ง ถ้าเสียแล้วก็เสียไปเลยทิ้งไป

การแจกแจงใดก็ตามที่ศึกษาถึงระยะเวลาที่รอคอยจนเกิดอุบัติการณ์พัวซองจนครบ r ครั้ง จะมีการแจกแจงแบบแกมม่าเสมอ ตัวอย่างเช่น ระยะเวลาที่นักขับรถจะต้องใช้ไปทั้งหมดจนกว่าจะผ่านสี่แยกไฟแดงทั้ง 5 แห่ง ระยะเวลาที่คอยจนกระทั่งรถด่วนเข้าเทียบชานชลาครบ 3 ขบวน (ตัวอย่างทั้งสองนี้มิใช่เรื่องของการแจกแจงแบบแกมม่า เพียงแต่พอสงเคราะห์เข้าสู่ลักษณะของการแจกแจงแบบแกมม่าโดยอนุโลมเท่านั้น ทั้งนี้เพราะปรากฏการณ์ที่กล่าวถึงคือการผ่านสี่แยกไฟแดง และการเทียบชานชลาของรถไฟมิใช่อุบัติการณ์พัวซอง)[1] ระยะเวลารอคอยจนกระทั่งฝนตกครบ 20 ครั้งระยะเวลาที่รอคอยจนกระทั่งเลนเลี้ยวขวา ณ. บริเวณสี่แยกไฟแดงติดขัดเมื่อเลนเลี้ยวขวาสามารถรับจำนวนรถที่คอยเลี้ยวขวาได้เพียง 10 คัน (กรณี

---

[1] อุบัติการณ์พัวซอง (Poisson Occurrence) หมายถึงปรากฏการณ์ที่อุบัติขึ้นในลักษณะที่เราไม่อาจคาดหมายได้ว่าจะอุบัติขึ้นเมื่อใด จังหวะเวลาใดของช่วงเวลาที่กำหนด

นี้ $r = 10$) ความทนทานของเสาคอนกรีตซึ่งทนแรงกระแทกขนาด 700 ปอนด์ ได้อย่างมาก 10 ครั้ง (ระยะเวลารอคอยจนกระทั่งเสาคอนกรีตร้าว) ระดับน้ำขึ้นสูงสุดของแม่น้ำเจ้าพระยาในปีหนึ่ง ๆ และอื่น ๆ

จากคำอธิบายและตัวอย่างข้างต้น เราจะพบว่า

1. การแจกแจงแบบแกมม่าจะต้องเป็นเรื่องของการรอคอยจนกระทั่งเกิดอุบัติการณ์พัวซองครบตามจำนวนครั้งที่ต้องการ[1]

2. พารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบแกมม่าจะมี 2 ตัวคือ r และ λ โดยปกติแล้วเราจะไม่ทราบค่าของ r เว้นแต่จะเป็นเรื่องของการประมาณค่าหรือ Convolution ของตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียล ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนคือระดับน้ำสูงสุด (ตามเกณฑ์ของนักวิจัย) โดยปกติเป็นเรื่องที่เราไม่อาจทราบได้ว่าปีหนึ่งระดับน้ำจะขึ้นสูงสุดถึงเกณฑ์ที่กำหนดไว้กี่ครั้ง

หรือในเรื่องจำนวนครั้งที่ฝนตกในปีหนึ่ง ๆ เราก็ไม่อาจทราบได้ว่ามีกี่ครั้ง ดังนี้ r จึงเป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่ง ส่วน λ คืออัตราถัวเฉลี่ยของการเกิดอุบัติการณ์พัวซองต่อหนึ่งหน่วยเวลา λx คือจำนวนอุบัติการณ์พัวซองที่เกิดขึ้นโดยถัวเฉลี่ยในช่วงเวลายาว x หน่วย

3. ในทางทฤษฎีค่า r จะแสดงรูปร่างของการแจกแจง (Shape Parameter) ส่วน λx เป็นค่าแสดงสเกลของการแจกแจง (Scaling Parameter) ดังภาพ ขอให้สังเกตว่าภาพทั้งสองแสดงสเกลใน 2 ลักษณะคือสเกลเป็น λx และ λ

การสร้างฟังก์ชั่นการแจกแจงแบบแกมม่าเราดำเนินการได้ 2 วิธี คือ

ก. โดยอาศัยการรวมตัวกัน (Convolution) ของตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลที่เป็นอิสระต่อกัน กล่าวคือ

---

[1] ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบแกมม่ากับการแจกแจงแบบพัวซองปรากฏดังนี้

ให้ X = จำนวนอุบัติการณ์พัวซอง (ในเรื่องที่สนใจ) ที่อุบัติขึ้นในช่วงเวลา $(0, t]$

ให้ T = ระยะเวลาที่ใช้ในการรอคอยจนเกิดอุบัติการณ์พัวซองครบ r ครั้ง

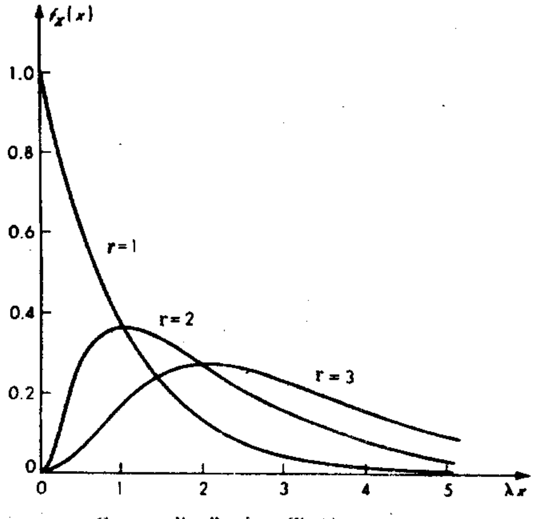
ดังนั้น $\Pr(T > t)$ = ความน่าจะเป็นที่เกิดอุบัติการณ์พัวซองไม่ถึง r ครั้งในช่วงเวลา $(0, t]$

$$\Rightarrow \quad F_T(t) = \Pr(T \leq t) = 1 - \Pr(T > t)$$

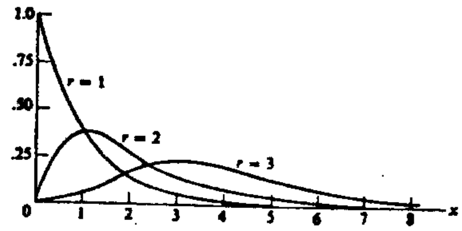
$$= 1 - \sum_{x=0}^{r-1} \Pr(X = x)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

ซึ่งยังแสดงว่าการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบแกมม่ากระทำได้โดยตารางพัวซองด้วย (เฉพาะกรณี r เป็นเลขจำนวนเต็ม)



Gamma distributions $G(r,\lambda)$.



Gamma densities ($\lambda = 1$).

ถ้า X_i; $i = 1, 2, \ldots, r$ เป็นอิสระต่อกันและต่างก็มีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล มีพารามิเตอร์ λ แล้ว ตัวแปรสุ่ม (ตัวสถิติ) $Y = \sum_{i}^{r} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบแกมม่า มีพารามิเตอร์ r และ λ

กรณีนี้ค่าของ r จะเป็นเลขจำนวนเต็ม (Integer-Valued) ดังกรณีตัวอย่างที่ยกให้เห็นในตอนต้น

ข. โดยอาศัยสังกัป (Concept) เกี่ยวกับสถานการณ์ของการแจกแจงแบบแกมม่าและการปรับปรุง Gamma Function ให้เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น ที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัว กล่าวคือ

จาก Gamma Function $\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u}\, du$

แปลงรูปตัวแปร U เป็น λX คือให้ $u = \lambda x$ เพื่อให้ฟังก์ชั่นกลายเป็นฟังก์ชั่นที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัว

$$\Rightarrow \quad \Gamma(r) = \int_0^\infty (\lambda x)^{r-1} e^{-(\lambda x)}\, dx\ ;\ \lambda > 0$$

หารตลอดด้วย $\Gamma(r)$

$$=> \qquad \int_0^\infty \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} dx = 1$$

ดังนั้น $f_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}$; $0 \leqslant x \leqslant \infty$ เรียกว่า Gamma Distribution

กรณีนี้เป็นกรณีทั่วไปของการแจกแจงแบบแกมม่า และเพราะเหตุที่พัฒนามาจาก Gamma Function r จึงไม่จำเป็นต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม ส่วนค่าของ λ ซึ่งหมายถึงอัตราถัวเฉลี่ยของการเกิดอุบัติการณ์พัวซองต่อ 1 หน่วยเวลานั้น เป็นค่าที่นักศึกษาคุ้นเคยมาแล้ว ค่าของ λ อาจเป็นจำนวนเต็มหรือไม่ก็ได้ อนึ่งเหตุที่การแจกแจงประเภทนี้มีชื่อเรียกว่า "แกมม่า" ก็ด้วยเหตุผลข้อ ข. นี้

นิยาม 4.9 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มี pdf ดังต่อไปนี้คือ

เมื่อ X = ระยะเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการรอคอยจนเกิดอุบัติการณ์พัวซองครบ r ครั้ง

$$G(r, \lambda) = F_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}; \ x \geqslant 0, \lambda > 0, r > 0$$ [1]

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น}$$

แล้วตัวแปรสุ่ม X จะเป็นตัวแปรสุ่มแกมม่าและเรียก pdf นี้ว่า "การแจกแจงแบบแกมม่า"

หมายเหตุ

1. ถ้า r เป็นตัวเลขจำนวนเต็มคือ r = 1, 2, ... ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมม่าตามนิยม เรานิยมเสนอรูปของ pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{(r-1)!} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}; \ x \geqslant 0, \lambda > 0, r = 1, 2, \ldots$$

---

[1] เหตุที่ระบุพารามิเตอร์ r และ λ ว่า $r > 0$ และ $\lambda > 0$ มีเหตุผลดังนี้

ก. การที่ต้องให้ $r > 0$ ก็เพราะ $\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u} du$ จะมีค่าปรากฏเฉพาะเมื่อ $r > 0$ และด้วยเหตุผลนี้ จึงช่วยยืนยันให้เห็นด้วยว่า r ไม่จำเป็นต้องเป็นเลขจำนวนเต็มเสมอไป

ข. การที่ต้องให้ $\lambda > 0$ ก็เพราะเป็นธรรมดาของอัตราเฉลี่ยของจำนวนอุบัติการณ์พัวซองต่อหน่วยเวลา ซึ่งต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ

และนิยมเรียกชื่อฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นนี้ว่า Erlang Distribution หรือ Pearson Type-III Distribution เพราะการแจกแจงแบบแกมม่าสอดคล้องกับระบบเปียร์สัน (Pearsonian System of Density Function)[1]

ขอให้สังเกตค่าของ $\Gamma(r)$ และ $(r-1)!$ จะพบว่า $\Gamma(r)$ นั้นสามารถหาค่า $\Gamma(r)$ ได้เสมอในทุกค่า r โดยที่ r ไม่จำเป็นต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม ส่วนกรณี $(r-1)!$ นั้น เราจะสามารถหาค่า $(r-1)!$ ได้เฉพาะเมื่อ r เป็นเลขจำนวนเต็มเท่านั้น แสดงว่า $\Gamma(r) = (r-1)!$ เมื่อ r เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

2. กรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมม่าที่สำคัญ ที่ถูกนำไปใช้มากในทางปฏิบัติคือ

ก. เมื่อ $r = 1$ และ $\lambda = \lambda$ การแจกแจงแบบแกมม่าจะลดรูปเป็นการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล มีพารามิเตอร์ λ และมี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \lambda e^{\lambda x} \qquad ; x \geqslant 0, \lambda > 0$$

ข. เมื่อ $r = 1$ และ $\lambda = 1$ การแจกแจงแบบแกมม่าจะลดรูปเป็นการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล (ดูรูป) มีพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ และมี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = e^{-x} \qquad ; x \geqslant 0$$

ค. ถ้า $r = \frac{n}{2}$ และ $\lambda = \frac{1}{2}$ การแจกแจงแบบแกมม่าจะเปลี่ยนรูปเป็นการแจกแจงแบบไคกำลังสอง (χ^2-Distribution) มีพารามิเตอร์ n (Degree of Freedom) และมี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n/2-1} e^{-1/2x} \qquad ; x \geqslant 0$$

ง. ถ้า $r = \frac{1}{2}$ และ $\lambda = \frac{1}{2}$ การแจกแจงแบบแกมม่าจะเปลี่ยนรูปเป็นการแจกแจงแบบไคกำลังสองมีพารามิเตอร์ 1 (Degree of Freedom) และมี pdf ดังนี้

---

[1] ถ้า pdf ใด ๆ สอดคล้องกับสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{1}{f_X(x)} \frac{d}{dx} f_X(x) = \frac{x + a}{b_0 + b_1x + b_2x^2}$ โดยที่ a, b_0, b_1, b_2 เป็นจำนวนคงที่แล้ว ถือว่า pdf นั้นสอดคล้องกับ Pearson System ในกรณีของการกระจายแบบแกมม่า พบว่า $\frac{1}{f_X(x)} \frac{d}{dx} f_X(x) = \frac{x - (r-1)/\lambda}{-x/\lambda}$ จะเห็นว่า $a = -\frac{r-1}{\lambda}$, $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{-1}{\lambda}$, $b_2 = 0$ แสดงว่าการกระจายแบบแกมม่าสอดคล้องกับ Pearsonian System

$$f_X(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-1/2} e^{-x/2} \quad ; \; x \geq 0$$

หรือ $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2} \quad ; \; x \geq 0 \quad \because \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

กรณีเฉพาะของ ค. และ ง. ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์ความแปรปรวน การสร้าง Test สำหรับทดสอบความแปรปรวนและการสร้าง Test Statistics สำหรับทดสอบ Goodness of Fit และความเป็นอิสระของคุณลักษณะทางประชากร (Contingency Table)

ทฤษฎี 4.14 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการกระจายแบบแกมม่า $G(r, \lambda)$ มี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad ; \; x \geq 0, \lambda > 0, r > 0$$

แล้ว X จะมี mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังต่อไปนี้

$$M_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r \quad , \quad E(X) = \frac{r}{\lambda} \quad , \quad V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

พิสูจน์

จาก $$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad ; \; x \geq 0$$

=> $$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^r x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{r-1} e^{-(\lambda - t)x} dx$$

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda - t)^r} u^{r-1} e^{-u} du, \text{ แปลงรูป } (\lambda - t)x = u$$

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \frac{1}{(\lambda - t)^r} \Gamma(r)$$

$$= (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r$$

$$E(X) = M_X'(t) \Big|_{t=0}$$

$$M_X'(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r \Big|_{t=0} = \lambda^r \cdot \frac{r}{(\lambda - t)^{r+1}} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{r}{\lambda}$$

$$=> \quad E(X) = \frac{r}{\lambda}$$

$$M''_X(t)\Big|_{t=0} = \lambda^r \frac{r(r+1)}{(\lambda+t)^{r+2}}\Big|_{t=0} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

$$=> \quad V(X) = M''_X(t)\Big|_{t=0} - (\frac{r}{\lambda})^2$$

$$= \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

ดังนั้นถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการกระจายแบบแกมม่า $G(r, \lambda)$ แล้ว

$$M_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r,\ E(X) = \frac{r}{\lambda} \text{ และ } V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

ข้อสังเกต เมื่อพิจารณากรณีเฉพาะตามหมายเหตุท้ายนิยามที่ 4.9 จะพบว่า

ก. ถ้า $r = 1$ และ $\lambda = \lambda$ จะพบว่าตัวแปรสุ่ม X ที่มี pdf, mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวน

ดังนี้

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ ;\ x \geq 0, \lambda > 0$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ E(X) = \frac{1}{\lambda},\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ข. ถ้า $r = 1$ และ $\lambda = 1$ ตัวแปรสุ่ม X จะมี pdf, mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = e^{-x}\ ;\ x \geq 0$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1},\ E(X) = 1 \text{ และ } V(X) = 1$$

ค. ถ้า $r = \frac{n}{2}$ และ $\lambda = \frac{1}{2}$ ตัวแปรสุ่ม X จะมี pdf, mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวน

ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2}\ ;\ x \geq 0$$

$$M_X(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{n/2} \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2} = (1-2t)^{-n/2}$$

$$E(X) = \frac{n/2}{1/2} = n \text{ และ } V(X) = \frac{n/2}{1/4} = 2n$$

ง. ถ้า $r = \frac{1}{2}$ และ $\lambda = \frac{1}{2}$ ตัวแปรสุ่ม X จะมี pdf, mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวน

$$f_X(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-1/2} e^{-x/2} ; x \geq 0$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t}\right)^{1/2} = (1 - 2t)^{-1/2}$$

$$E(X) = 1 \text{ และ } V(X) = 2$$

ตัวอย่าง 4.30

ก. จงแสดงให้เห็นว่าการแจกแจงแบบแกมม่าเกิดจากการรวมตัวกัน (Convolution) ของตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลที่เป็นอิสระต่อกัน

ข. จงแสดงให้เห็นว่าตัวแปรสุ่มแกมม่ามีคุณสมบัติแห่งการรวมตัวกัน (Reproductive Property) เมื่อตัวแปรสุ่มทุกตัวต่างก็มีพารามิเตอร์ λ เดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน

ค. จงแสดงให้เห็นว่าตัวแปรสุ่ม χ^2 มีคุณสมบัติแห่งการรวมตัวกัน (Reproductive Property) เมื่อตัวแปรสุ่มทุกตัวเป็นอิสระต่อกัน

ก. $X_i \sim EX(\lambda)$; $i = 1, 2, \ldots r$ และต่างก็เป็นอิสระต่อกัน

ให้ $$Y = \sum_{i}^{r} X_i$$

ดังนั้น $$M_Y(t) = \prod_{i}^{r} M_{X_i}(t)$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - t} \cdots \frac{\lambda}{\lambda - t}}_{r \text{ ครั้ง}}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

$=>$ $Y \sim G(r, \lambda)$

ข. ให้ $X_i \sim G(r_i, \lambda)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ และต่างก็เป็นอิสระต่อกัน

ให้ $$Y = \sum_{i}^{n} X_i$$

ดังนั้น $M_Y(t) = \prod_{i}^{n} M_{X_i}(t)$

$$= (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{r_1} \cdot (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{r_2} \cdots (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{r_n}$$

$$= (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{r_1+r_2+\ldots+r_n}$$

นั่นคือ Y มีการแจกแจงแบบแกมม่าที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i}^{n} r_i$ และ λ ตามลำดับ

$\Rightarrow Y \sim G(\sum_{i}^{n} r_i, \lambda)$ หรือตัวแปรสุ่มแกมม่ามี Reproductive Property

ค. ให้ $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$; $i = 1, 2, \ldots, k$ และต่างก็เป็นอิสระต่อกัน

เนื่องจาก $X_i \sim \chi^2_{(n_i)} \Rightarrow X_i \sim G(r = \frac{n_i}{2}, \lambda = \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \quad M_{X_i}(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{n_i/2} = (\frac{1}{1 - 2t})^{n_i/2}; \; i = 1, 2, \ldots, k$$

ให้ $Y = \sum_{i}^{k} X_i$

ดังนั้น $M_Y(t) = \prod_{i}^{n} M_{X_i}(t)$

นั่นคือ $Y \sim \chi^2_{(n_1+n_2+\ldots+n_k)} = (\frac{1}{1 - 2t})^{(n_1+n_2+\ldots+n_k)/2}$

แสดงว่าตัวแปรสุ่ม χ^2 มีคุณสมบัติแห่งการรวมตัวกัน
กรณีเฉพาะที่สำคัญคือ เมื่อ $X_i \sim \chi^2_{(1)}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว $Y = \sum_{i}^{n} X_i \sim \chi^2_{(n)}$

ซึ่งแสดงให้เห็นได้โดยง่ายดังนี้
เนื่องจาก $X_i \sim \chi^2_{(1)}$

$$\Rightarrow \quad M_{X_i}(t) = (\frac{1}{1 - 2t})^{1/2}$$

ดังนั้น เมื่อให้ $Y = \sum_{i}^{n} X_i$

$$=> \quad M_Y(t) = \prod_{i}^{n} M_{X_i}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{(1+1+\ldots+1)/2}$$

$$= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$$

แสดงว่าเมื่อตัวแปรสุ่ม $X_i \sim \chi^2_{(1)}$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_{i}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n)}$

ข้อสังเกต ขอให้นักศึกษาจำแนกความแตกต่างของ Gonvolution และ Reproductive Property ให้ออก มิฉะนั้นจะสับสนได้

Convolution หมายถึงการรวมตัวของตัวแปรสุ่มประเภทเดียวกันซึ่งเมื่อรวมตัวกันแล้ว ฟังก์ชั่นของตัวแปรสุ่ม (Y) จะมีการแจกแจงเป็นรูปอื่น เช่นตัวแปรสุ่มเอกโพเนนเชียลรวมตัวกันแล้วมีการแจกแจงแบบแกมม่า ตัวแปรสุ่มอนุกรมเรขาคณิตรวมตัวกันแล้วมีการแจกแจงแบบนิเสธทวินาม ตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นุลลิรวมตัวกันแล้วเป็นการแจกแจงแบบทวินาม เป็นต้น (ในตำราหลายเล่มจะให้ความหมายของ Convolution ครอบคลุมไปถึง Reproductive Property ด้วย) Convolution มีประโยชน์มากในแง่ของการพัฒนาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มตัวใหม่ขึ้นมา และในแง่ของการหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวสถิติ

Reproductive Property หมายถึงการรวมตัวของตัวแปรสุ่มประเภทเดียวกัน ซึ่งเมื่อรวมตัวกันแล้ว ฟังก์ชั่นของตัวแปรสุ่ม (Y) จะยังคงมีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเช่นเดิม เช่นตัวแปรสุ่มทวินามรวมตัวกันแล้วยังคงมีการแจกแจงแบบทวินาม ตัวแปรสุ่มพัวซองรวมตัวกันแล้วยังคงมีการแจกแจงแบบพัวซอง ตัวแปรสุ่มแบบแกมม่ารวมตัวกันแล้วยังคงมีการแจกแจงแบบแกมม่า ตัวแปรสุ่ม χ^2 รวมตัวกันแล้วยังคงมีการแจกแจงแบบ χ^2 ตัวแปรสุ่มปกติรวมตัวกันแล้วยังคงมีการแจกแจงแบบปกติ เป็นต้น อย่างไรก็ตามฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นใหม่นี้อาจมีโครงสร้างผิดไปจากเดิมบ้าง และอาจจำเป็นต้องมีข้อจำกัดเกี่ยวกับพารามิเตอร์ เรื่องนี้ขอให้นักศึกษาย้อนไปพิจารณาการแจกแจงแต่ละแบบโดยละเอียด

ทั้ง Convolution และ Reproductive Property จำเป็นต้องมีเงื่อนไขว่าตัวแปรสุ่มที่จะมารวมตัวกันนั้นต้องเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งเมื่อเป็นดังนี้จึงเป็นประโยชน์มากในทฤษฎีการสุ่มตัวอย่างและฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวสถิติ ทั้งนี้เพราะหน่วยตัวอย่าง (Sampling Unit) ในแต่ละตัวอย่าง (Sample) จะต้องเป็นอิสระต่อกันเสมอ นักศึกษาจะพบประโยชน์ของทั้ง Convolution และ Reproductive Property ในเรื่องการทดสอบสมมุติฐาน

อนึ่ง การรวมตัวของตัวแปรสุ่มต่างประเภทกันเป็นเรื่องที่นอกเหนือไปจากความหมายของ Convolution และ Reproductivé Property และนอกเหนือความมุ่งหมายของหนังสือเล่มนี้ อย่างไรก็ตามได้กล่าวถึงการรวมตัวของตัวแปรสุ่มต่างประเภทกันไว้บ้างแล้วในตอน 4.1.9

ตัวอย่าง 4.31 ถ้า $X \sim G(r, \lambda)$ จงแสดงให้เห็นว่า $Y = 2\lambda X$ มีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(2r)}$ และถ้า $Y \sim \chi^2_{(2r)}$ จงแสดงให้เห็นว่า $X = \frac{Y}{2\lambda}$ มีการแจกแจงแบบแกมม่า $G(r, \lambda)$

วิธีทำ เนื่องจาก $X \sim G(r, \lambda)$

$$=> \quad M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

กำหนดให้ $Y = 2\lambda X$

$$=> \quad M_Y(t) = M_X(2\lambda t)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - 2\lambda t}\right)^r$$

$$= \left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{2r/2}$$

นั่นคือ $Y \sim \chi^2_{(2r)}$

ในทางกลับกัน

เนื่องจาก $Y \sim \chi^2_{(2r)}$

$$=> \quad M_Y(t) = \left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{2r/2}$$

ให้ $X = Y/2\lambda$

$$=> \quad M_X(t) = M_Y\left(\frac{1}{2\lambda}\, t\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - 2 \cdot \frac{1t}{2\lambda}}\right)^{2r/2}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

นั่นคือ $X \sim G(r, \lambda)$

ตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างแสดงการใช้ตาราง A.2 ซึ่งเป็นตารางแสดง cdf ของการแจกแจงแบบ χ^2 แกมม่าและพัวซอง ค่าในตารางแสดง $Pr(X > x)$ คือ $\int_x^\infty f_X(x)dx$

จะแสดงการใช้ตารางเพื่อคำนวณหา cdf ของ χ^2 แกมม่า และพัวซองให้ดูดังนี้

ก. เมื่อต้องการหา $Pr(\chi^2_{(6)} \leq 1.1)$ ให้ดูหัวตารางที่ตรงกับค่า $\chi^2 = 1.1$ แล้วค่อย ๆ ไล่ลงมาตามแนวดิ่งตรงกับค่า df $\nu = 6$ จะพบว่า $Pr(\chi^2_{(6)} > 1.1) = .98154$ ดังนั้น

$$Pr(\chi^2_{(6)} \leq 1.1) = 1 - .98154 = .01846$$

ข. เมื่อต้องการหา $Pr(Z \leq 1.0)$ เมื่อ $Z \sim G(r = 1.5, \lambda = 2)$ ให้แปลงรูปตามตัวอย่างเสียก่อนคือ

$$F_Z(z) = Pr(Z \leq z) = Pr(2\lambda Z \leq 2\lambda z)$$

$$= Pr(\chi^2_{(2r)} \leq 2\lambda z)$$

ดังนั้น $F_Z(1.0) = Pr(Z \leq 1.0) = Pr(\chi^2_{(3)} \leq (2)(2)(1.0)) = Pr(\chi^2_{(3)} \leq 4)$

ให้ดูที่หัวตาราง ณ. ค่า $\chi^2 = 4$ ณ. ค่า df $\nu = 3$ จะพบว่า $Pr(\chi^2_{(3)} > 4) = 0.26146$

ดังนั้น $Pr(Z \leq 1.0) = 1 - 0.26146 = 0.73854$

ค. ในขณะเดียวกันตาราง A.2 ยังสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบพัวซองด้วย มีวิธีใช้ดังนี้

ให้ X = จำนวนอุบัติการณ์พัวซองในช่วงเวลายาว $t = \frac{m}{\lambda}$ [1] หน่วย

ให้ Z = ระยะเวลาที่รอคอยจนเกิดอุบัติการณ์พัวซองครั้งที่ $x + 1$

ดังนั้น $Pr(Z > t)$ = Pr (เกิดอุบัติการณ์พัวซองไม่ถึง $x + 1$ ครั้งในช่วงเวลายาว $t = \frac{m}{\lambda}$)

= Pr (เกิดอุบัติการณ์พัวซองไม่เกิน x ครั้งในช่วงเวลายาว $t = \frac{m}{\lambda}$)

= $Pr(X \leq x)$

$$\Rightarrow \quad Pr(X \leq x) = Pr(Z > t) = 1 - Pr(Z \leq t)$$

$$= 1 - Pr\left(Z \leq \frac{m}{\lambda}\right)$$

---

[1] ให้ $m = \lambda t \Rightarrow t = \frac{m}{\lambda}$ เมื่อ m จำนวนอุบัติพัวซองที่เกิดขึ้นทั้งหมด (โดยถัวเฉลี่ย) ในช่วงเวลายาว t หน่วย λ = อัตราถัวเฉลี่ยของการเกิดอุบัติการณ์พัวซองใน 1 หน่วยเวลา

แต่เนื่องจาก $Z \sim G(r = x + 1, \lambda)$

$$=> \qquad Pr(Z \leqslant t) = Pr(\chi^2_{(2(x+1))} \leqslant 2\lambda t) = Pr(\chi^2_{(2(x+1))} \leqslant 2\lambda \frac{m}{\lambda})$$

$$= Pr(\chi^2_{(2(x+1))} \leqslant 2m)$$

ดังนั้น $\qquad Pr(X \leqslant x) = 1 - Pr(\chi^2_{(2(x+1))} \leqslant 2m)$

เช่นต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติการณ์พัวซองไม่เกิน 3 ครั้งในช่วงเวลายาว t หน่วย ซึ่งโดยถัวเฉลี่ยแล้วในช่วงเวลาขนานนั้น $(0, t)$ จะมีอุบัติการณ์พัวซองปรากฏขึ้น 1.3 ครั้ง

ความน่าจะเป็นที่ต้องการคือ $Pr(X \leqslant 3) = ?$ เมื่อ $m = \lambda t = 1.3$

$$=> \qquad Pr(X \leqslant 3) = 1 - Pr(\chi^2_{(2(3+1))} \leqslant (2)(1.3))$$

$$= 1 - Pr(\chi^2_{(8)} \leqslant 2.6)$$

จากตารางพบว่า

$$Pr(\chi^2_{(8)} \leqslant 2.6) = 1 - .95691 = .04308$$

ดังนั้น $\qquad Pr(X \leqslant 3) = 1 - Pr(\chi^2_{(8)} \leqslant 2.6) = 1 - .04308 = .95692$

โดยปกติเรามีตารางสำหรับคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบ χ^2 และพัวซองแยกไว้ต่างหาก นักศึกษาสามารถเลือกใช้ตารางเหล่านั้นได้เองตามความต้องการ ถ้าเห็นว่าตารางที่มีไว้ให้นี้ใช้ยากและวกไปเวียนมา ผู้เขียนไม่มีเจตนาจะทำให้เรื่องต่าง ๆ ดูยุ่งยากและสับสน ในที่นี้มีเจตนาเพียงต้องการให้นักศึกษามองเห็นความผูกพันและสัมพันธ์กันอย่างลึกซึ้งระหว่างการแจกแจงแบบพัวซอง เอกโพเนนเชียล แกมม่า และ χ^2 ซึ่งคาดว่านักศึกษายังไม่เคยพบในที่ใดมาก่อน

สำหรับกรณีต้องการหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล ก็ให้ใช้วิธีข้อ ข. เพียงแต่ถือว่า $X \sim G(r = 1, \lambda)$ เท่านั้น นอกนั้นดำเนินการตามวิธีข้อ ข. ทุกประการ

ตัวอย่าง 4.32 จากสถิติกระแสน้ำไหลสูงสุด (Maximum Stream Flow) รายปีของแม่น้ำสายหนึ่ง การสังเกตุกระทำติดต่อกันทุกปี ตั้งแต่พ.ศ. 2473 ถึงพ.ศ. 2503 พบว่าระดับน้ำสูงสุดมีการแจกแจงแบบแกมม่า $G(r = 1.727, \lambda = 0.00672$ ลบ.ฟ.) จงคำนวณค่าคาดหมาย ความแปรปรวน และความน่าจะเป็นที่กระแสน้ำไหลสูงสุดในปีหนึ่ง ๆ จะมีค่าไม่เกิน 400 ลบ.ฟ.)

วิธีทำ ให้ X = ปริมาณกระแสน้ำไหลสูงสุด

เนื่องจาก $X \sim G(1.727, 0.00672)$

ดังนั้น

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} = \frac{1.727}{0.00672} = 256.7$$

$$V(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{1.727}{(0.00672)^2} = 36,100$$

$$\begin{aligned} Pr(X \leqslant 400) &= Pr(2\lambda X \leqslant (2)(0.00672)(400)) \\ &= Pr(\chi^2_{(2r)} \leqslant 5.4) \\ &= Pr(\chi^2_{(3.452)} \leqslant 5.4) \\ &\simeq Pr(\chi^2_4 \leqslant 5.4) \\ &\simeq 1 - .24866 \\ &\simeq .75134 \end{aligned}$$

หรือจะคำนวณหาโดยตรงจาก pdf ของ X ก็ได้

$$Pr(X \leqslant 400) = \int_0^{400} \frac{(0.00672)^{1.727}}{\Gamma(1.727)} x^{.727} e^{-0.00672x} dx$$

จะเห็นว่าอินทรีเกรตค่อนข้างยุ่งยาก นักศึกษาคำนวณได้โดยอาศัยทฤษฎีการโน้มสู่เกณฑ์กลาง (CLT)

ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Pr(X \leqslant 400) &= Pr\left(\frac{X - F(X)}{\sigma_Y} \leqslant \frac{400 - 256.7}{190}\right) \\ &\simeq Pr(Z \leqslant .76) \\ &\simeq .7989 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.33 อายุใช้งานของอุปกรณ์อิเลคโทรนิคส์แต่ละตัวในวงจรไฟฟ้ามีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล มีค่าโดยเฉลี่ยเท่ากับ 1,000 ชั่วโมง (หรือระยะเวลาระหว่างการเสื่อมสภาพของอุปกรณ์อิเลคโทรนิคต่าง ๆ ในวงจรมีค่าเฉลี่ย 1,000 ชั่วโมง)

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์ชิ้นที่ 3 จะเสื่อมสภาพภายหลังจากที่ใช้ไปแล้ว 4,250 ชั่วโมง

ข. จงหาค่าคาดหมายระยะเวลาการใช้งานของวงจรจนกระทั่งอุปกรณ์อิเลคโทรนิคเสื่อมสภาพครบ 3 ตัว

วิธีทำ ให้ X = อายุใช้งาน (เวลาระหว่างเหตุการณ์ที่ "อุปกรณ์แต่ละชิ้นเสื่อมคุณภาพ") ของอุปกรณ์อิเลกโทรนิก

=> $X \sim EX(\lambda = 0.001)$

ดังนั้น

$$Y = \sum_{i}^{3} X_i \sim G(r = 3, \lambda = 0.001)$$

ก. $Pr(Y > 4250) = ?$

จากตาราง A.2 จะพบว่า

$$\begin{aligned} Pr(Y > 4250) &= Pr(2\lambda Y > (2)(.001)(4250)) \\ &= Pr(\chi^2_{(6)} > 8.5) \\ &\simeq .20386 \end{aligned}$$

หรือประมาณค่าด้วย CLT ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Pr(Y > 4250) &\simeq Pr\left(\frac{(Y - EY)}{\sigma_Y} > \frac{4250 - 3/(0.001)}{\sqrt{3/(0.001)^2}}\right) \\ &\simeq Pr\left(Z > \frac{1250}{1732.1}\right) \\ &\simeq Pr(Z > .72) \\ &\simeq .1921 \end{aligned}$$

ข. $E(X) = \frac{r}{\lambda} = \frac{3}{.001} = 3000$ ชั่วโมง

นั่นคือ โดยถัวเฉลี่ยแล้วคาดว่าวงจรไฟฟ้าจะใช้งานได้นานประมาณ 3,000 ชั่วโมง อุปกรณ์อิเลกโทรนิกจึงจะเสื่อมสภาพครบ 3 ตัว

4.2.3 การแจกแจงแบบเบต้า (Beta Distribution)

การกระจายแบบเบต้าเป็นการกระจายที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัวเช่นเดียวกับการแจกแจงแบบแกมม่า ดังนั้นรูปร่างลักษณะของการแจกแจงแบบเบต้าจึงเปลี่ยนแปลงไปได้เสมอเมื่อค่าของพารามิเตอร์ทั้งสองเปลี่ยนค่าไปเมื่อเป็นเช่นนี้ การแจกแจงแบบเบต้าจึงนำไปประยุกต์ได้อย่างกว้างขวาง[1] เพราะสามารถลดรูปลงเป็น pdf ต่าง ๆ ได้หลายลักษณะเพื่อให้รับกับข้อมูลทดลอง (หรือสังเกต) ที่มีอยู่และค่าของตัวแปรสุ่มเบต้าสามารถปรับให้ครอบคลุมจำนวนต่าง ๆ ได้ตามข้อจำกัดของงานวิจัยเกี่ยวกับค่าของตัวแปรสุ่ม ซึ่งจะเห็นได้ว่าการแจกแจงแบบเบต้าครอบคลุมลักษณะของข้อมูลได้อย่างกว้างขวางกว่าการแจกแจงแบบอื่น[2]

การแจกแจงแบบเบต้าสามารถเสนอได้ 2 แบบคือ กรณีเมื่อค่าของตัวแปรสุ่มมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 กับกรณีเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าอยู่ระหว่างเลขจำนวนใด ๆ คือระหว่าง a หรือ b (กรณีที่ 2 นี้เป็นกรณีทั่วไปของกรณีแรก) จะได้กล่าวถึงทั้งสองกรณีโดยละเอียดต่อไป

4.2.3.1 การแจกแจงของตัวแปรสุ่มเบต้าที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

พิจารณา Beta Function[3]

$$\beta(r, t-r) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}\,dx$$

ถ้าหารตลอดด้วย $\beta(r, t-r)$ จะพบว่า

$$1 = \frac{1}{\beta(r, t-r)}\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}\,dx$$

---

[1] เช่นเดียวกันกับการแจกแจงแบบแกมม่าที่สามารถประยุกต์ไปได้อย่างกว้างขวาง ขอให้สังเกตกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมม่าเมื่อค่า r และ λ เปลี่ยนค่าไป ที่เห็นได้เด่นชัดที่สุดคือกรณีเมื่อ ก. $r = 1, \lambda = \lambda$ ข. $r = n/2, \lambda = \frac{1}{2}$ ค. $r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ และ Combination อื่นของ r และ λ ซึ่งจะก่อให้เกิด pdf แปลกไปเรื่อย ๆ

[2] ยกเว้น Truncated Disbribution เช่น truncated Normal, Truncated Gamma หรืออื่น ๆ ที่จำกัดหรือหยุด (Truncated) ค่าของตัวแปรสุ่ม ณ. ช่วงของตัวเลขตามข้อจำกัดของงานวิจัย เช่น จำกัดค่าของตัวแปรสุ่มปกติที่ 0 (จำกัดด้านซ้าย) และ 1 (จำกัดด้านขวา) Truncated Normal ก็จะมีรูปร่างและโครงสร้างเปลี่ยนไป มีค่า Domain อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งในกรณีเช่นนี้ผลลัพธ์ที่จะนำไปใช้ก็คงไม่ต่างไปจากการกระจายแบบเบต้ามากนัก

[3] โดยทั่วไปเรานิยาม Beta Function ดังนี้

$$\beta(a, b) \doteq \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \;:\; a, b > 0$$

ดังนี้ จึงเห็นได้ว่า เราสามารถปรับให้ Beta Function กลายเป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นที่มี Domain อยู่ในระหว่าง 0 ถึง 1 เรียกฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นนี้ว่า "การแจกแจงแบบเบต้า" (Beta Distribution) ดังนั้น การแจกแจงแบบเบต้าจึงมี pdf ดังนี้

$$BT(r, t) = \frac{1}{\beta(r, t - r)} x^{r-1} (1 - x)^{t-r-1} \; ; \; 0 < x < 1, r > 0, t - r > 0$$

จึงเห็นได้ว่า การแจกแจงแบบเบต้าพัฒนาขึ้นมาจาก Beta Function และขอให้สังเกตไว้ด้วยว่า ใน Beta Function นั้น ค่าของ r และ t − r ไม่จำเป็นต้องเป็นเลขจำนวนเต็มเสมอไป ทั้งนี้เพราะค่าของ r และ t − r ใน Beta Function นั้นเรานิยามให้เป็นจำนวนบวกใด ๆ (Positive Number)

นิยาม 4.10 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นดังนี้คือ

$$BT(r, t) = \frac{1}{\beta(r, t - r)} x^{r-1} (1 - x)^{t-r-1} \; ; \; 0 < x < 1, r > 0, t - r > 0$$

แล้ว เราจะเรียกฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ว่า "การแจกแจงแบบเบต้า"

ข้อสังเกต เนื่องจากค่าของ r และ t − r ไม่จำเป็นต้องเป็นเลขจำนวนเต็มและเนื่องจาก $\beta(r, t - r) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(t - r)}{\Gamma(r + t - r)} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(t - r)}{\Gamma(t)}$ ดังนั้นเราจึงสามารถแยกพิจารณาหรือนำเสนอการแจกแจงแบบเบต้าออกได้เป็น 2 ลักษณะคือ

ก. $f_X(x) = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(r)\Gamma(t - r)} x^{r-1} (1 - x)^{t-r-1} \; ; \; 0 < x < 1$

เมื่อ r และ t − r เป็นเลขจำนวนบวกใด ๆ (Positive Number) และ

ข. $f_X(x) = \frac{(t - 1)!}{(r - 1)!\,(t - r - 1)!} x^{r-1} (1 - x)^{t-r-1} \; ; \; 0 < x < 1$

เมื่อ r และ t − r เป็นเลขจำนวนเต็ม (Integer Valued)

ทฤษฎี 4.15 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบเบต้าที่นิยามในช่วง 0 ถึง 1 แล้ว ตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$E(X) = \frac{r}{t}, \quad V(X) = \frac{r}{t^2}\frac{(t-r)}{(t+1)} = \frac{E(X)\{1-E(X)\}}{t+1}$$

พิสูจน์

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\beta(r, t-r)} x.x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}dx$$

$$= \frac{1}{\beta(r, t-r)} \int_0^1 x^r(1-x)^{t-r-1}dx$$

$$= \frac{1}{\beta(r, t-r)} . \beta(r+1, t-r)$$

$$= \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(r)\Gamma(t-r)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)(t-r)}{\Gamma(t+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(t).r\Gamma(r)\Gamma(t-r)}{\Gamma(r)\Gamma(t-r)t\Gamma(t)}$$

$$= \frac{r}{t}$$

และ

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta(r, t-r)} \int_0^1 x^2x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}dx$$

$$= \frac{1}{\beta(r, t-r)} \int_0^1 x^{r+1}(1-x)^{t-r-1}dx$$

$$= \frac{\beta(r+2, t-r)}{\beta(r, t-r)}$$

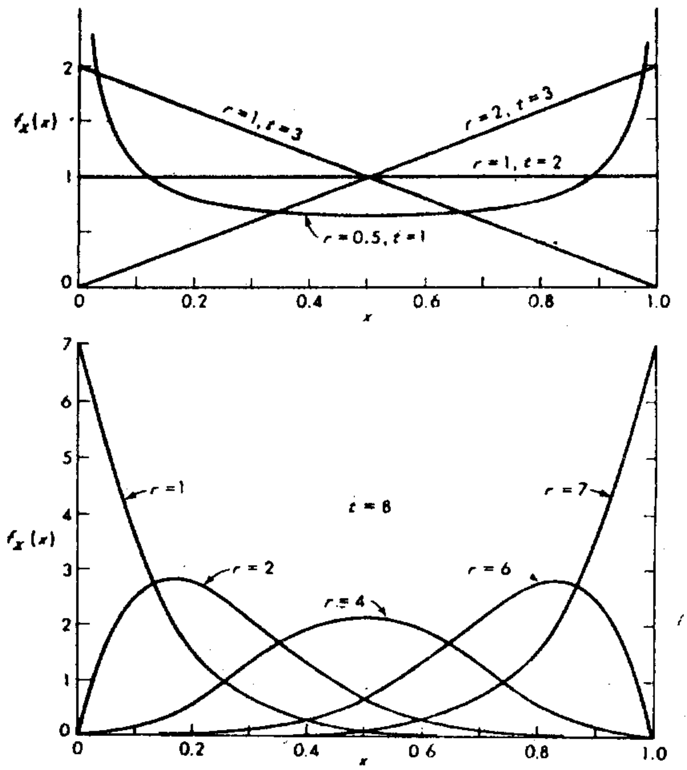
$$= \frac{r(r+1)\Gamma(r)\Gamma(t-r)\Gamma(t)}{t(t+1)\Gamma(t)\Gamma(t)\Gamma(t-r)}$$

$$= \frac{r(r+1)}{t(t+1)}$$

ดังนั้น
$$V(X) = \frac{r(r+1)}{t(t+1)} - \frac{r^2}{t^2}$$
$$= \frac{rt(r+1) - r^2(t+1)}{t^2(t+1)}$$
$$= \frac{r^2t + rt - r^2t - r^2}{t^2(t+1)}$$
$$= \frac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$$
$$= \frac{r}{t}\ \frac{(1 - r/t)}{t+1}$$
$$= \frac{E(X)\{1 - E(X)\}}{t+1}$$

นั่นคือ ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีค่าการแจกแจงแบบเบต้าแล้ว ตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าคาดหมายและความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{r}{t}$ และ $\frac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$ หรือ $\frac{E(X)\{1 - E(X)\}}{(t+1)}$ ตามลำดับ

ภาพของการแจกแจงแบบเบต้าปรากฏดังนี้



Beta-distribution shapes.

ต่างไม่
เฉพาะรูป
ทันฉบับ

ขอให้สังเกตุว่า รูปร่างของโค้ง (Curve) จะแตกต่างกันไปตามค่าของพารามิเตอร์ r และ t ดังนั้นในทางปฏิบัติ เราจึงสามารถปรับค่าของ r และ t ไปได้เรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ค่าที่เหมาะสมทำให้ได้โค้งที่รับกับการแจกแจงของข้อมูลซึ่งอาจเสนอโดย Scatter Diagram หรือ Histogram

จากภาพขอให้ข้อสังเกตุไว้ 8 ประการดังนี้ (ดูภาพประกอบคำอธิบาย)

1. ถ้า $r = 1$ และ $t = 2$ การแจกแจงแบบเบต้าจะเปลี่ยนรูปเป็นการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มที่สมมาตรกับ ณ ค่า $X = \frac{1}{2}$ (Contineous Uniform Distribution) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Rectangular Distribution มี pdf. mgf. ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = 1 \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$M_X(t) = \frac{1}{t}(e^t - 1), E(X) = \frac{1}{2}, \ V(X) = \frac{1}{2^2(2+1)} = \frac{1}{12}$$

2. ถ้า $r = 2$ และ $r = 3$ การแจกแจงแบบเบต้าจะเปลี่ยนรูปเป็น Triangular Distribution มี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = 2x \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$E(X) = \frac{2}{3} \text{ และ } V(X) = \frac{2(3-2)}{3^2(3+1)} = \frac{2}{36}$$

3. ถ้า $r = 1$ และ $t = 3$ การแจกแจงแบบเบต้าจะเปลี่ยนรูปเป็น Triangular Distribution มี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = 2(1-x); \ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$F(X) = \frac{1}{3} \text{ และ } V(X) = \frac{1(3-1)}{3^2(3+1)} = \frac{2}{36}$$

4. รูปร่างของโค้งจะสมมาตรกัน ณ ค่า $x = \frac{1}{2}$ ถ้า $r = \frac{t}{2}$

5. รูปร่างของโค้งจะเป็นรูปตัว U ถ้า $r < 1$ และ $t \leqslant 2r$ (ดูรูปกรณี $r = 0.5, t = 1$)

กรณีที่ $r = 0.5$ และ $t = 1$ การแจกแจงแบบเบต้าจะมี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$= \frac{1}{\pi} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1 \; : \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}; \; V(X) = \frac{1}{8}$$

6. รูปร่างของโค้งจะเป็นรูปตัว J หรือ J กลับ ถ้า $r > 1$ และ $t \geqslant r + 1$ หรือ $r \leqslant 1$ และ $r > r + 1$ ตามลำดับ (ดูรูปกรณี $r = 7, t = 8$ และ $r = 1, t = 8$)

กรณี $r = 7, t = 8$ การแจกแจงแบบเบต้าจะมี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = 7x^6 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$E(X) = \frac{7}{8} \text{ และ } V(X) = \frac{7}{576}$$

และกรณี $r = 1, t = 8$ การแจกแจงแบบเบต้าจะมี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = 7(1-x)^6 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$E(X) = \frac{1}{8} \text{ และ } V(X) = \frac{7}{576}$$

7. รูปร่างของโค้งจะเป็นรูปทรงเบ้ขวา (Skew to the Right) ถ้า $r < \frac{1}{2}t$ (ดูรูปกรณี $r = 2$ และ $t = 8$) และเบ้ซ้ายถ้า $r > \frac{1}{2}t$ (ดูรูปกรณี $r = 6, t = 8$) ค่าฐานนิยม (Mode) จะปรากฏ ณ. ค่า $x = \frac{r-1}{t-2}$ และในทั้งสองกรณีค่าฐานนิยมจะเลื่อนไปมาได้ ถ้าค่าของ r และ t เปลี่ยนแปลงไป

กรณี $r = 2$ และ $t = 8$ $(t < \frac{1}{2}t)$ การแจกแจงแบบเบต้าจะมี pdf ค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและค่าฐานนิยมดังนี้

$$f_X(x) = 42x(1-x)^5 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$E(X) = \frac{1}{4}, \; V(X) = \frac{3}{144}, \; Mo \equiv x = 0.167$$

กรณี $r = b$ และ $t = 8$ $(t < \frac{1}{2}t)$ การแจกแจงแบบเบต้าจะมี pdf ค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและค่าฐานนิยมดังนี้

$$f_X(x) = 42x^5(1-x)^5 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$E(X) = \frac{6}{8}, \; V(X) = \frac{1}{144}, \; M_0 \equiv x = 0.83$$

8. ถ้า $r > 1$ และ $t > r + 1$ รูปร่างของโค้งจะเป็นรูประฆังคว่ำ (Bell-Shaped) ค่าฐานนิยมจะปรากฏ ณ ค่า $x = \frac{r-1}{t-2}$ และค่าฐานนิยมเพียงค่าเดียว (Unimodal) ไม่เปลี่ยนแปลงค่าไปได้เช่นกรณี 7 (ดูรูปกรณี $r = 4, t = 8$)

กรณี $r = 4$ และ $t = 8$ จะพบว่าการแจกแจงแบบเบต้ามี pdf ค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและค่าฐานนิยมดังนี้

$$f_X(x) = 140x^3(1-x)^3 \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$F(X) = \frac{1}{2}, \; V(X) = \frac{1}{36} \text{ และ } M_0 \equiv x = 0.5$$

การแจกแจงแบบเบต้าที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X ปรากฏอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 สามารถประยุกต์ได้กับงานทุกลักษณะที่ขอบเขตของการศึกษานั้นถือว่าค่าของข้อมูลจากการทดลองหรือสังเกตมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 กรณีที่นำไปใช้มากคืองานทางด้านอิเลกโทรนิก เช่นในเรื่องของสัญญาณต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะคือ $r = 1$ และ $t = 2$ (Uniform Distribution) ถูกนำไปใช้ในการสร้างเลขสุ่ม (Random Number)[1]

เพราะค่าของเลขสุ่มจะปรากฏเป็นจำนวนระหว่าง 0 ถึง .999... เช่นเลขสุ่ม 5 หลัก ค่าของเลขสุ่มจะมีค่าปรากฏระหว่าง 0.00001 ถึง 0.99999 นอกจากนี้ การกระจายแบบเบต้ายังถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวาง ในการศึกษาเรื่อง Order Statistics ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาสถิติแบบไม่มีพารามิเตอร์ (Nonparametric Statistics) อีกด้วย

การหาค่าความน่าจะเป็นของเบต้า กระทำได้ 2 ลักษณะดังนี้

ก. ในกรณีทั่วไป เมื่อ r และ t มีค่าเป็นเลขจำนวนใด ๆ

$$Pr(X \leqslant x) = \int_0^x f_X(x)dx$$

หรือ $Pr(a \leqslant X \leqslant b)$ เมื่อ $a < b$ และ $0 \leqslant a, b \leqslant 1$

$$\Rightarrow Pr(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

---

[1] ขอให้นักศึกษาไปศึกษาค้นคว้าเรื่อง Simulation และ Monte Carlo Technique

การหาค่าความน่าจะเป็นโดยนัยนี้กระทำเช่นเดียวกันกับกรณีการหาค่าความน่าจะเป็นทั่ว ๆ ไปเช่นเดียวกันกับการแจกแจงแบบอื่น

ข. กรณีเฉพาะเมื่อ r และ t เป็นเลขจำนวนเต็ม (Integer-Valued)

เมื่อ r และ t เป็นเลขจำนวนเต็ม เราสามารถหาค่าความน่าจะเป็นของเบต้าได้โดยอาศัยตารางการแจกแจงทวินาม ดังวิธีการต่อไปนี้

เนื่องจาก $$f_X(x) = \frac{(t-1)!}{(r-1)!\,(t-r-1)!} x^{r-1}(1-x)^{t-r-1} \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant 1$$

เมื่อเปรียบเทียบกับการแจกแจงทวินาม b(x; n, p) ซึ่งมีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นดังนี้

$$f_Y(y) = \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y q^{n-y} \; ; \; y = 0, 1, 2, \ldots, n$$

จะพบว่า $f_X(x)$ มีโครงสร้างเกือบจะเหมือนกับ $f_Y(y)$ เพียงแต่ปรับรูป $f_X(x)$ เพียงเล็กน้อยก็จะได้รูปที่มีลักษณะเช่นเดียวกันกับ $f_Y(y)$

ดังนั้น $$f_X(x) = \frac{(t-1)(t-2)!}{(r-1)!\,(t-r-1)!} x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}$$

$$= (t-1)\binom{t-2}{r-1} x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}$$

$(t-2) = n, (r-1) = y, x = p, (1-x) = q$[1]

ดังนั้น $$f_X(x) = (t-1)f_Y(y) = (t-1)f_Y(t-1)$$[2]

และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\Pr(X \leqslant x) = 1 - \Pr(Y \leqslant r-1)$$

หรือ $$F_X(x) = 1 - F_Y(r-1)$$[3]

โดยที่

$X \sim BT(r, t)$ และ $Y \sim b(n = t-2, p = x)$

---

[1] เหตุที่ให้ $x = p, 1 - x = 1 - p = q$ เพราะทั้ง x และ p มีค่าปรากฏอยู่ในช่วง 0, 1 เช่นเดียวกัน

[2] กรณีนี้เป็นกรณีที่ใช้สำหรับวาดรูปโค้งแสดงการแจกแจงของตัวแปรสุ่มเบต้า โดยการ plot คู่ลำดับ $(x, f_X(x))$ ทีละจุด x จะเป็นค่าบนแกนนอน ส่วน $f_X(x)$ จะเป็นค่าในแนวตั้ง การหาค่า $f_X(x)$ ให้ดำเนินการโดยเปลี่ยนค่า x ไปทีละน้อย

[3] การพิสูจน์ความเป็นจริงตามทฤษฎีนี้ค่อนข้างจะซับซ้อน จะขอเว้นไว้ไม่กล่าวถึงในที่นี้

ตัวอย่าง 4.34 เมื่อ $X \sim BT(2, 8)$ จงหา $\Pr(X \leqslant \frac{1}{2})$

วิธีทำ เราสามารถคำนวณหา $\Pr(X \leqslant \frac{1}{2})$ ได้ 2 วิธีดังนี้

ก. โดยอาศัยการแจกแจงแบบ $BT(2, 8)$ โดยตรง

เนื่องจาก $X \sim BT(2, 8)$

$$
\begin{aligned}
=> \qquad f_X(x) &= 42x(1-x)^5 \ ; \ 0 < x < 1 \\
\Pr(X \leqslant \tfrac{1}{2}) &= 42 \int_0^{1/2} x(1-x)^5 \, dx \\
&= 42 \int_0^{1/2} (x - 5x^2 + 10x^3 - 10x^4 + 5x^5 - x^5) \, dx \\
&= 42\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{24} - \frac{10}{64} - \frac{10}{128} + \frac{5}{384} - \frac{1}{896}\right) \\
&= 0.8906
\end{aligned}
$$

ข. โดยอาศัยตารางของการแจกแจงทวินาม

เนื่องจาก $X \sim BT(2, 8)$

$=> r = 2, r - 1 = 1, t = 8, n = t - 2 = 6, p = x = \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \leqslant x) &= 1 - \Pr(Y \leqslant r - 1) \\
&= 1 - \Pr(Y \leqslant 1) \\
&= 1 - \sum_{y=0}^{1} \binom{6}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{6-y} \\
&= 1 - 0.1094 \\
&= 0.8906
\end{aligned}
$$

สำหรับเส้นโค้งแสดงฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น $f_X(x) = 42x(1-x)^5; 0 \leqslant x \leqslant 1$ สามารถวาดได้โดยไม่ยากนัก การวาดเส้นโค้ง $f_X(x)$ ให้อาศัยความสัมพันธ์

$$f_X(x) = (t - 1)f_Y(r - 1)$$

โดยค่อย ๆ เปลี่ยนค่า x ไปทีละน้อยจาก 0 ถึง 1 จะได้ค่า $f_X(x)$ ที่สอดคล้องกับ x นำคู่ลำดับ $(x_i; f_X(x_i))$ มา plot ก็จะได้เส้นโค้งตามต้องการ

เช่น $x = 0, \quad f_X(0) = (8-1)\Pr(Y = 2-1) = 7\binom{6}{1}(10)^1(1)^5 = 0$

$x = 0.1, f_X(0.1) = (8-1)\Pr(Y = 1) = 7\binom{6}{1}(0.1)(0.9)^5 = 7(0.3543) = 2.48$

$x = 0.2, f_X(0.2) = (8-1)\Pr(Y = 1) = 7\binom{6}{1}(0.2)(0.8)^5 = 7(0.3933) = 2.75$

.

.

.

$x = 1 \ , f_X(1) = (8-1)\Pr(Y = 1) = 7\binom{6}{1}(1)(0)^5 = 0$

แล้วนำคู่ลำดับ (0, 0), (0.1, 2.48), (0.2, 2.75), ..., (1, 0) มาพล็อตจะได้เส้นโค้งของ $f_X(x) = 42x(1-x)^5$ ตามต้องการ

การหาค่าต่าง ๆ ของ $f_X(.)$ และการวาดโค้งขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

4.2.3.2 การแจกแจงของตัวแปรสุ่มเบต้าที่มีค่าอยู่ระหว่าง a ถึง b เมื่อ $a < b$ และ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

นิยาม 4.11 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นดังนี้ คือ

$$BT(a, b, r, t) = f_X(x) = \frac{1}{\beta(r, t-r)(b-a)^{t-1}}(x-a)^{r-1}(b-x)^{t-r-1}$$

$a \leq x \leq b$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นนี้ว่า "การแจกแจงแบบเบต้าในช่วง a, b"

หมายเหตุ

1. ถ้า $X \sim BT(a, b, r, t)$ แล้วเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $E(X) = a + \frac{r}{t}(b-a)$ และ $V(X) = (b-a)^2 \frac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$

2. กรณี BT(a, b, r, t) เป็นกรณีทั่วไปของ BT(r, t) ที่นิยามในช่วง $0 \leq x \leq 1$ กรณีถ้าให้ $a = 0$ และ $b = 1$ จะพบว่า

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(r, t-r)} x^{r-1}(1-x)^{t-r-1} ; 0 \leq x \leq 1$$

$$E(X) = r/t \quad \text{และ} \quad V(X) = \frac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$$

ซึ่งก็คือ BT(r, t) ที่กล่าวถึงในตอน 4.2.3.1 นั่นเอง

3. ถ้า r = 1, t = 2 จะพบว่า

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a} \quad ; a \leqslant x \leqslant b$$

$$E(X) = a + (b - a)/2 = (a + b)/2 \text{ และ}$$

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นสำหรับกรณีนี้เรียกว่าการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง a, b เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นที่ถูกนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางสำหรับสถานการณ์ที่ถือว่าปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่พึงเกิดขึ้นในช่วง a ถึง b นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นได้อย่างทัดเทียมกัน หรือไม่อาจแสดงเหตุผลให้เห็นเป็นอย่างอื่นได้ เช่น คลื่นสั่นสะเทือนของแผ่นดินไหวมีโอกาสพุ่งในทิศทางระหว่าง 0° ถึง 360° ได้เท่ากัน หรือมีโอกาสพุ่งผ่านในทิศทางหนึ่งเท่ากับ $\frac{1}{360}$ หรือ เลขสุ่มจำนวนใด ๆ มีโอกาสปรากฏขึ้นในช่วง 0 ถึง .99999 ได้ทัดเทียมกัน เป็นต้น โดยทั่วไปเราจะนำการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มไปใช้ในงานที่ถือว่าเหตุการณ์ต่าง ๆ ปรากฏขึ้นโดยสุ่ม (at random) และมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

ตัวอย่าง 4.35 ในการสร้างทางวิ่งของเครื่องบิน (Runway) วิศวกรจะต้องคำนึงถึงทิศทางลม ทั้งนี้เพื่อป้องกันสภาพมลพิษ (Pollution) เช่น ควัน เสียง หรือแก๊สพิษจากเครื่องยนต์

จากการบันทึกข้อมูลทิศทางลม ณ. จุดที่จะก่อสร้าง (วัดเป็นองศาจากทิศเหนือ) พบว่าโดยถัวเฉลี่ยลมจะพัดมาในทิศ 205° และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 99.7° จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของทิศทางลม ณ. จุดนั้น

วิธีทำ เนื่องจากการพัดผ่านของลมสามารถปรากฏไปในทิศทางต่าง ๆ ได้โดยสุ่ม และสามารถพัดไปได้ในทุกทิศทางตั้งแต่ 0° ถึง 360° ได้อย่างทัดเทียมกัน

ดังนั้น ถ้าให้ X = ทิศทางลม

$$\Rightarrow X \sim BT(0°, 360°, r, t) \quad E(X) = r/t \quad V(X) = r(t - r)/t^2(t + 1)$$

และพบว่า $E(X) = 205"$ $\sigma_X = 99.1$

$$\Rightarrow \quad t/t = 205 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{r(t - r)}{t^2(t + 1)} = (99.7)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\Rightarrow \quad r = 1.25, \quad t = 2.2$$

$$X \sim BT(0°, 360°, 1.25, 2.3)$$

4.2.4 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงแบบปกติเป็นโมเดล (Model) ของผลรวมของสิ่งต่าง ๆ (Distribution of Sums) เช่น ผลรวมเวลาที่เสียไปในการตรวจสอบหรือทดลองแผนปฏิบัติการซ้ำหลาย ๆ ครั้ง ผลรวมของข้อผิดพลาดจากการวัดระยะ ผลรวมความยาวของรถยนต์ที่ติดไฟแดง และอื่น ๆ โดยทั่วไปเรานิยมนำการแจกแจงแบบปกติไปใช้กับข้อมูลที่เกิดจากการวัด (measurement) ต่าง ๆ และสามารถใช้ได้กว้างขวางในงานแทบทุกลักษณะเพราะมีทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลาง (Central Limit Theorem) เป็นสื่อกลาง

ที่กล่าวว่าการแจกแจงแบบปกติ เป็นโมเดลของผลรวมก็เพราะการแจกแจงประเภทนี้พัฒนาขึ้นมาจากการหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของผลรวมดังต่อไปนี้ อนึ่งเนื่องจากการแจกแจงแบบปกติส่วนใหญ่เป็นเรื่องของตัวแปรที่เกิดจากการวัดค่า ดังนั้นโดเมน (Domain) ของค่าตัวแปรสุ่มปกติจึงนับรวมค่าต่าง ๆ ในเส้นตรง (Real Line) ได้ทั้งหมด

สมมุติให้ $X_i =$ ค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการวัดความยาวของวัตถุชิ้นที่ 1 และถือว่าความผิดพลาดจะเกิดขึ้นในขนาดไม่เกิน 1 หน่วย

ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม X_i จึงมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง $[-1, 1]$ (หรือ $B(a = -1, b = 1, r = 1, t = 2)$)

ให้ $Y_1 = X_1$ ความผิดพลาดที่เกิดจากการวัดความยาวของวัตถุชิ้นที่ 1

$$\Rightarrow \qquad f_Y(y) = \frac{1}{2} \qquad -1 \leq y \leq 1$$

ให้ $Y_2 = X_1 + X_2$ ผลรวมของความผิดพลาดที่เกิดจากการวัดความยาวของวัตถุ 2 ชิ้น โดยอาศัยเทคนิคการแปลงรูปตัวแปรสุ่ม (Transformation of Random Variables)

$$\Rightarrow \qquad f_{Y_2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - |y|) & ; \quad -2 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } y \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

ให้ $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3 =$ ผลรวมของความผิดพลาดที่เกิดจากการวัดความยาวของวัตถุ 3 ชิ้น

$$\Rightarrow \qquad f_{Y_3}(y) = \begin{cases} \frac{1}{16}(3 - |y|)^2 & ; \quad 1 \leq || \leq 3 \\ \frac{3}{8} - \frac{1}{8}y^2 & ; \quad |y| \leq 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } Y \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

ให้ $Y_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ = ผลรวมความผิดพลาดที่เกิดจากวัดความยาวของวัตถุ 4 ชิ้น

$$=> \qquad f_{Y_4}(y) = \begin{cases} \frac{1}{96}(4-|y|)^3 & ; \quad 2 \leqslant |y| \leqslant 4 \\ \frac{1}{3} + \frac{y^2}{32}(|y|-4) & ; \quad 0 \leqslant |y| \leqslant 2 \\ 0 & ; \quad \text{เมื่อ } y \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึง $f_{Y_n}(y)$

และโดยอาศัยการปรับค่า k และ c ที่เหมาะสมในลักษณะที่ทำให้พื้นที่ใต้โค้งมีค่าเท่ากับ 1 จะได้ฟังก์ชั่นของ Y ที่สามารถใช้เป็นตัวแทนของฟังก์ชั่นจริงข้างต้นดังนี้

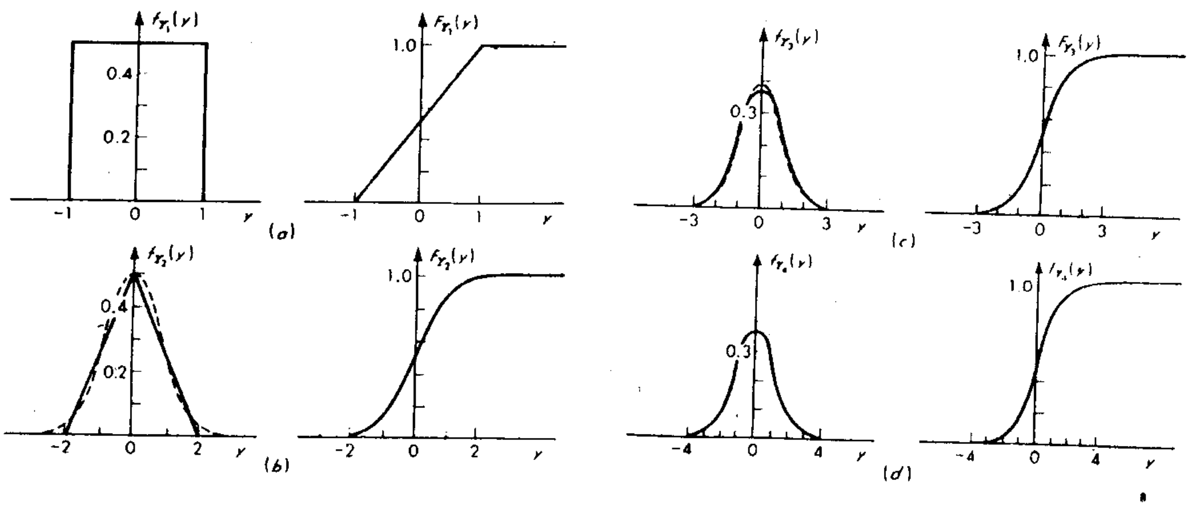
$$f_{Y_i}(y) = ke^{-cy^2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty$$

โค้งเปรียบเทียบระหว่าง $f_{Y_1}(y)$, $f_{Y_2}(y)$, $f_{Y_3}(y)$, $f_{Y_4}(y)$ กับ $f_{Y_i}(y) = ke^{-cy^2}$; $i = 1, 2, 3, 4$ ปรากฏดังภาพต่อไปนี้ โดยโค้งที่เกิดจาก $f_{Y_i}(y) = ke^{-cy^2}$; $-\infty < y < \infty$ แสดงด้วยเส้นประ ขอให้สังเกตว่าโค้งของ $f_{Y_1}(y), \ldots, f_{Y_4}(y)$ จะมีรูปร่างเป็นลักษณะระฆังคว่ำเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น

ด้วยเหตุนี้ เราจึงนำฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Y ในลักษณะที่ปรับแล้วคือ

$$f_Y(y) = ke^{-cy^2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty$$

มาใช้แทนรูปที่แท้จริงของ $f_{Y_i}(y)$ ทั้งด้วยเหตุผลที่ว่า รูปที่ปรับแล้วมีลักษณะที่ง่ายกว่า และประการที่สำคัญคือสามารถใช้แทนกันได้เป็นอย่างดี (ขอให้สังเกตุเปรียบเทียบ จะเห็นได้ว่า เมื่อ $n > 2$ รูปร่างของโค้งจากฟังก์ชั่นจริงและฟังก์ชั่นที่ปรับแล้วจึงมีลักษณะเดียวกัน และทับกันสนิท)



ฟังก์ชัน $f_Y(y) = ke^{-cy^2}$; $-\infty \leqslant y \leqslant \infty$ เรียกว่า Double Exponential หรือ Gaussian Distribution หรือการแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

อย่างไรก็ตาม ขอให้สังเกตุไว้ว่าการแจกแจงแบบปกตินั้นไม่จำเป็นต้องมีค่าเฉลี่ยที่ 0 เสมอไปดังที่ปรากฏข้างต้น เราสามารถแปลงรูป $f_Y(y) = ke^{-cy^2}$ ให้มีค่าเฉลี่ย (ศูนย์กลาง) ณ. ที่จุดใดก็ได้โดยอาศัยการขยับ (Shift) ให้ภาพไปมีศูนย์กลาง ณ. ที่จุดอื่น ดังนี้

$$f_Y(y) = ke^{-c(y-m)^2} \quad ; \quad -\infty \leqslant y \leqslant \infty \quad ; \quad -\infty \leqslant m \leqslant \infty$$

จากฟังก์ชั่นใหม่นี้โค้งจะมีศูนย์กลาง (ค่าเฉลี่ย) ที่ m และเนื่องจากโค้งของ $f_Y(y)$ สมมาตรกัน ณ. ที่จุด m (ขอให้สังเกตภาพข้างต้น จะพบว่าสมมาตรกัน ณ. จุด 0) ดังนั้น m ในที่นี้จึงเป็นพารามิเตอร์แสดงค่าคาดหมาย (ค่าเฉลี่ย) ของตัวแปรสุ่ม Y ปัญหาต่อไปจึงเป็นเรื่องของการหาค่า k ที่เหมาะสมที่ทำให้ $f_Y(y)$ เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น

จาก $\quad f_Y(y) = ke^{-c(y-m)^2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty \quad ; \quad -\infty < m < \infty$

$f_Y(y)$ จะเป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นก็ต่อเมื่อ $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$

$$=> \quad \int_{-\infty}^{\infty} ke^{-c(y-m)^2}dy = 1$$

โดยอาศัยการเปลี่ยนรูปตัวแปรและ Integrate by Part หรืออาศัย Gamma Function

$$=> \quad \frac{k\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}} = 1$$

นั่นคือ

$$k = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}$$

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} e^{-c(y-m)^2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty, \; -\infty < m < \infty$$

พิจารณา V(Y)

$$V(Y) = E(Y - m)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m)^2 \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} e^{-c(y-m)^2}dy$$

โดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรและ Integrate by Part หรืออาศัย Gamma Function

$$=> \quad V(Y) = \frac{1}{2c}$$

นั่นคือ $\sigma_Y = \dfrac{1}{\sqrt{2c}}$

=> $\sqrt{c} = \dfrac{1}{\sigma_Y\sqrt{2}}$ => $c = \dfrac{1}{2\sigma_Y^2}$

ดังนั้น $f_Y(y) = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} e^{-c(y-m)^2}$; $-\infty < y < \infty, -\infty < m < \infty$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} e^{-1/2(y-m)^2/\sigma_Y^2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty, -\infty < m < \infty$$

ดังนั้นรูปทั่วไปของการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 จึงปรากฏดังนี้

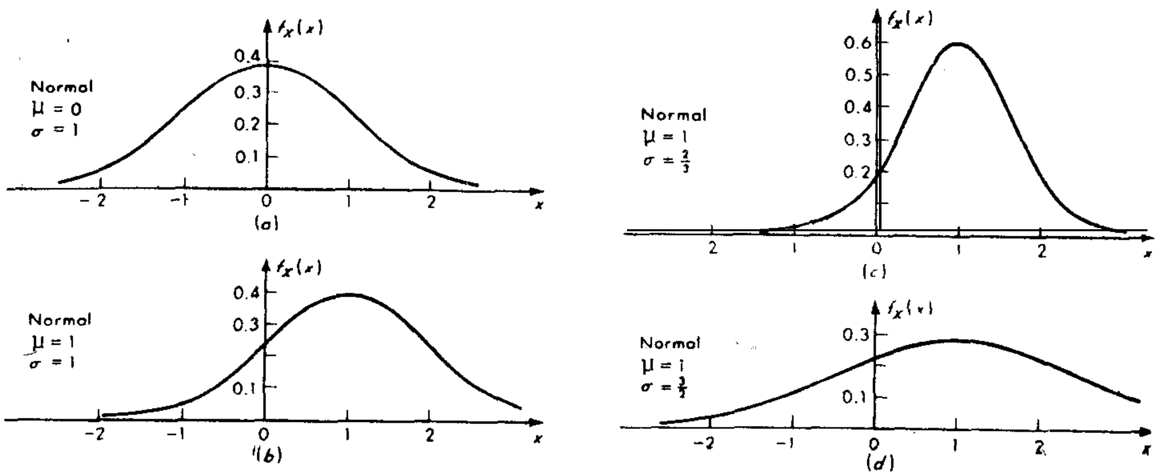
$$N(\mu, \sigma^2) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-1/2(y-\mu)^2/\sigma^2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty, -\infty < \mu < \infty$$

หรือ

$$N(\mu, \sigma^2) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp (.- \& \ (y \quad \mu)^2\}$$

$$; -\infty < y < -\infty < \mu < \infty$$

การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่าง ๆ กันปรากฏดังภาพต่อไปนี้ ขอให้สังเกตุว่าเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าสูงขึ้น โค้งจะแบนลง ส่วนฐานจะขยายกว้างขึ้นทั้งนี้ เพื่อเป็นการปรับพื้นที่ใต้โค้งมีค่าเท่ากับ 1 และเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าลดลง โค้งจะมีลักษณะฐานแคบเข้าและยอดแหลม ยิ่งส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าน้อยลงมากเพียงใด โค้งจะยิ่งมียอดแหลมมากขึ้นและพุ่ง “โด่ง” สูงขึ้นฐานแคบลงมากขึ้น เหล่านี้เป็นเรื่องของการปรับ



โค้งให้มีพื้นที่ใต้โค้งเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นลักษณะที่จำเป็นของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นนั่นเอง และในสถานการณ์ทางปฏิบัตินั้นเราปรารถนาโค้งฐานแคบมากกว่าโค้งฐานกว้าง เพราะทำให้การคาดหมายด้วยช่วงเชื่อมั่น (Interval Estimate) มีความถูกต้องแม่นยำมากกว่า

การแจกแจงแบบปกติเป็นโมเดลที่มีผู้รู้จักและนำไปใช้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ข้อมูลที่เกี่ยวกับความผิดพลาดอันเกิดจากการวัด (Error of Measurement) ดังกล่าวแล้วในตอนต้น การจะถือว่า (Assume) ตัวแปรสุ่มใดมีการแจกแจงแบบปกติได้นั้น ผู้วิจัยต้องคำนึงอยู่ในใจเสมอว่าค่าของตัวแปรสุ่มนั้นเกิดขึ้นมาจากผลรวมของค่าต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องหรือไม่ ประเด็นนี้สำคัญมาก เพราะถ้าขาดความคำนึงถึงเสียแล้วจะทำให้เกิดความผิดพลาดในงานขึ้นได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่มี "ข้อตกลงเบื้องต้น" เกี่ยวกับการแจกแจงของตัวแปรสุ่มและปรากฏพบอยู่เสมอว่านักวิจัยที่ไม่มีความรู้ความเข้าใจอย่างแท้จริงเกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติมักจะ "หลับตา" กำหนดข้อตกลงในลักษณะ "ถือว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ" ทั้งนี้เพื่อหาหนทางก้าวเข้าไปสู่การใช้ t-test หรือ F-test โดยสะดวก และเป็นการหลีกเลี่ยงการตรวจสอบโมเดล (Model Verification of Observed Data) ซึ่งมีกระบวนการที่ซับซ้อนและกินเวลามากไปในตัว ในอีกประการหนึ่งที่สำคัญไม่ยิ่งหย่อนไปกว่ากันก็คือ การคำนึงถึงลักษณะเฉพาะตัวของการแจกแจงแบบปกติที่ว่า เป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่เกิดจากผลรวม (Model of Sums) ก็คือการใช้ทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลาง (CLT) อย่างมีประสิทธิภาพ ทฤษฎีการโน้มสู่เกณฑ์กลางก็เป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นมาจากผลรวมของค่าตัวแปรสุ่ม (ดูบทที่ 2) เช่นกัน ดังนั้นการจะนำทฤษฎีนี้ไปใช้จึงต้องคำนึงถึงในลักษณะเดียวกันว่ากลุ่มประชากรที่กำลังศึกษามีลักษณะ หรือโครงสร้างที่พัฒนาขึ้นมาจากผลรวมหรือไม่ กรณีที่สามารถนำทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลางไปใช้ได้ดีคือกรณีของกลุ่มประชากรที่กำลังศึกษามีการแจกแจงแบบแกมม่า $G(r, \lambda)$ (เพราะ $G(r, \lambda)$ เกิดจากผลรวมของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอกโพเนนเชียล (λ)) การแจกแจงแบบ χ^2, แบบปกติ การแจกแจงแบบทวินาม การแจกแจงแบบพัวซอง และตัวแปรสุ่มทั้งหลายที่พัฒนาขึ้นมาจาก Convolution และ Reproductive Family

สถานการณ์ของผลรวมดังกล่าวข้างต้นปรากฏผลพอจะยกให้เห็นเป็นตัวอย่างดังต่อไปนี้

1. ความจุของผิวจราจรในกรุงเทพฯเกิดจากผลรวมของความจุของผิวจราจรของถนนสายต่าง ๆ รวมกัน
2. ความแข็งเหนียวของวัตถุเกิดจากผลรวมของความแข็งเหนียวของโมเลกุลของวัตถุ
3. ความยืดหยุ่นของแผ่นพลาสติกเกิดจากผลรวมของความยืดตัวของช่องฟองอากาศ
4. ความยาวของโต๊ะที่เรียงต่อกันเกิดจากผลรวมของความยาวของโต๊ะ แต่ละตัว

5. คะแนนของนักเรียนแต่ละคนเกิดจากผลรวมคะแนนสอบสำหรับคำถามแต่ละข้อ
6. จำนวนพนักงานที่ลาป่วยในแต่ละเดือนเกิดจากผลรวมจำนวนพนักงานที่ลาป่วยในแต่ละวัน
7. จำนวนประชากรในประเทศเกิดจากผลรวมของประชากรในครัวเรือนต่าง ๆ ทั้งหมดในประเทศ

เหล่านี้ เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นคำว่า "ผลรวม" หมายถึงอะไร แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าจะมองให้ลึกลงไปจริง ๆ ข้อมูลต่าง ๆ โดยส่วนใหญ่สามารถเสนอได้ในรูปของผลรวมได้เสมอ ซึ่งถ้ามองในลักษณะนี้อาจจะเป็นการเสี่ยงเกินไปถ้าจะสรุปว่าตัวแปรสุ่มที่มีค่าดังกล่าวมีการแจกแจงแบบปกติ เพราะจำเป็นต้องตรวจสอบคุณสมบัติข้างเคียงอื่นประกอบอีกหลายประการ เช่นการตรวจสอบ Kurtosis[1] การตรวจสอบโมเดลด้วย Normal Probability Paper การตรวจสอบ Goodness of Fit Test และอื่น ๆ แต่ประเด็นหลักที่จะต้องยึดถือคือลักษณะความเป็น "ผลรวม" ของปัจจัยที่เกี่ยวข้อง

---

[1] จากนิยาม Central Moment ที่ n^{th}

$$\mu_X^{(n)} = E\{(X - E(X)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f_X(x)\, dx$$

ถ้าสนใจการแจกแจงของตัวแปรสุ่มสมมาตรกันหรือไม่ เครื่องมือที่ใช้ตรวจสอบคือ สัมประสิทธิ์แห่งความเบ้ (Coefficient of Skewness) γ_1

$$\gamma_1 = \frac{\mu_X^{(3)}}{\sigma_X^3}$$

ถ้า $\gamma_1 < 0$ เส้นโค้งจะเบ้ซ้าย ถ้า $\gamma_1 = 0$ โค้งจะสมมาตร และถ้า $\gamma_1 > 0$ โค้งจะเบ้ขวา
ในกรณีของการแจกแจงแบบปกติ γ_1 จะมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ

และถ้าสนใจว่าเส้นโค้ง pdf "แบน" หรือ "โด่ง" เพียงใดให้ใช้ Coefficient of Kurtosis γ_2 เป็นเครื่องมือตรวจสอบ

$$\gamma_2 = \frac{\mu_X^{(4)}}{\sigma_X^4}$$

สำหรับกรณีของการแจกแจงแบบปกติพบว่า $\mu_X^{(n)} = \frac{n!}{2^{n/2}(n/2)!} \cdot \sigma^n ;\ n = 2, 4, \ldots$

ดังนั้น

$$\gamma_2 = \frac{\mu_X^{(4)}}{\sigma_X^4} = \frac{1}{\sigma^4} \cdot \frac{4!}{2^2 2!}\ \sigma^4 = 3$$

ค่า $\gamma_2 = 3$ ถือว่าเป็นมาตรฐานสำหรับเป็นฐานเทียบสำหรับการแจกแจงทุกแบบ ถ้าพบว่า pdf ใดมีค่า $\gamma_2 = 3$ เราก็จะมีหลักฐานชิ้นหนึ่งที่พอจะยืนยันว่า pdf นั้นมีการแจกแจงแบบปกติ ถ้า $\gamma_2 > 3$ โค้งจะแบนกว่าการแจกแจงปกติ ถ้า $\gamma_2 < 3$ โค้งจะพุ่งโด่งกว่าการแจกแจงปกติ

นิยาม 4.12 ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution หรือ Gaussion Distribution) ถ้า X มี Pdf ดังนี้คือ

$$N(\mu, \sigma^2) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2; \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0$$

ทฤษฎี 4.16 ถ้า $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว

$$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2},\ E(X) = \mu \text{ และ } V(X) = \sigma^2$$

พิสูจน์

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx$$

ให้ $\frac{x-\mu}{\sigma} = u$ ดังนั้น $x = \mu + \sigma u$ และ $dx = \sigma du$

$$=> \quad M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\mu+\sigma t u} \cdot e^{-1/2u^2} du$$

$$= e^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2(u^2-2\sigma t u)} du$$

$$= e^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\{(u-\sigma t)^2-\sigma^2 t^2\}} du$$

$$= e^{\mu t} \cdot e^{\sigma^2 t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2(u-\sigma t)^2} du$$

ให้ $u - \sigma t = v$ ดังนั้น $du = dv$

$$=> \quad M_X(t) = e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2v^2} dv$$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} s^{-1/2} e^{-s} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = 1$$

โดยกำหนดให้ $s = v^2/2$ => $M_X(t) = e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}$

ดังนั้น $E(X) = M'_X(t)\Big|_{t=0} = e^{\mu t + \sigma^2t^2/2} \cdot (\mu + \sigma^2 t)\Big|_{t=0} = \mu$

และ $M''_X(t) = \sigma^2 e^{\mu t + \sigma^2t^2/2} + e^{\mu t + \sigma^2t^2/2} \cdot (\mu + \sigma^2 t)^2$

ดังนั้น

$$E(X^2) = M''_X(t)\Big|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2$$

=> $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

นั่นคือ

เมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2t^2/2}$. $E(X) = \mu$ และ $V(X) = \sigma^2$

สำหรับคุณสมบัติต่าง ๆ ของการแจกแจงแบบปกตินั้นได้กล่าวถึงไว้มากแล้วในบทที่ 1-3 คุณสมบัติบางประการเสนอไว้ในรูปของตัวอย่าง บางประการเสนออิงไว้กับการแจกแจงแบบอื่น ๆ ขอให้นักศึกษาย้อนไปศึกษาดูอีกครั้งและจะไม่ขอกล่าวซ้ำอีกในที่นี้

ตัวอย่าง 4.36 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากร $N(0, \sigma^2)$ เมื่อต้องการทดสอบข้อสมมุติฐาน

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } H_1 : \sigma_0^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$$

พบว่า เขตวิกฤติคือ $\sum_i^n X_i^2 \geq k$ (ปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลัก (H_0) เมื่อ $\sum_i^n X_i^2 \geq k$)

จงคำนวณหาตัวทดสอบ (Test Statistics) ที่สอดคล้องกับระดับนัยสำคัญ α

วิธีทำ เขตวิกฤติคือ $\sum_i^n X_i^2 \geq k, k = ?$

และระดับนัยสำคัญ $= \alpha$

ดังนั้น โดยอาศัยนิยามของความเสี่ยงประเภทที่ 1 (α) และการปรับพื้นที่ใต้โค้งของตัวสถิติ $\sum_i^n X_i^2$ ที่ทำให้พื้นที่ตั้งแต่เปอร์เซนต์ไทล์ที่ k มีค่ารวมเท่ากับ α จะพบว่า

α = Pr (ปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลัก เมื่อสมมุติฐานหลักเป็นจริง)

=> $\alpha = \Pr(\sum_i^n X_i^2 \geq k \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$

และเนื่องจาก $\sum_i^n \{ \dfrac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \}^2 \sim \chi^2_{(n)}$

$$\Rightarrow \qquad \alpha \;=\; \Pr\left(\sum_{i}^{n} X_i^2/\sigma_0^2 \geq k/\sigma_0^2\right) \qquad \text{..........(1)}$$

ในที่นี้ $\sum_{i}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma_0}\right)^2 = \sum_{i}^{n}\left(\frac{X_i - 0}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$ แสดงว่า α ในสมการข้างต้นนี้คือพื้นที่ใต้โค้งของ $\chi^2_{(n)}$

ดังนั้น โดยอาศัยสมการด้านขวาของสมการ (1) แสดงว่า $\alpha = \Pr(\chi^2_{(n)} \geq \chi^2_{1-\alpha})$

$$\Rightarrow \qquad \alpha \;=\; \Pr(\chi^2_{(n)} \geq \chi^2_{1-\alpha}) \;=\; \Pr\left(\sum_{i}^{n} X_i/\sigma_0^2 \geq k/\sigma_0^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \chi^2_{1-\alpha} \;=\; k/\sigma_0^2$$

$$\Rightarrow \qquad k \;=\; \sigma_0^2 X^2_{1-\alpha}$$

ดังนั้นตัวสถิติสำหรับทดสอบข้อสมมุติฐาน $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$ ที่สอดคล้องกับระดับนัยสำคัญ α คือ

ปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลัก (H_0) เมื่อ $\sum_{i}^{n} X_i^2 \geq \sigma_0^2 X^2_{1-\alpha}$

หมายเหตุ

เทคนิคต่าง ๆ ในการสร้างเขตวิกฤติและพัฒนาตัวทดสอบสำหรับสมมุติฐานต่าง ๆ ทั้งกรณีพารามิเตอร์เดี่ยว (Single Parameter) และหลายพารามิเตอร์ (Several Parameters) ทั้งของกลุ่มประชากรปกติและกลุ่มประชากรแบบอื่น ๆ นักศึกษาจะได้ศึกษาโดยละเอียดในบทต่อ ๆ ไป ในที่นี้ยกมาให้เห็นเป็นตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นประโยชน์ของการมีความรู้เกี่ยวกับ pdf และการแจกแจงของตัวสถิติ (Sampling Distribution) ซึ่งจะต้องถูกนำไปใช้อย่างเข้มข้นในบทดังกล่าว ในที่นี้เป็นการตัดทอนบางส่วนมาเสนอนักศึกษาจึงยังอาจ "งง" เพราะยังไม่คุ้นเคยกับหลายเรื่องเช่นเขตวิกฤติ ระดับนัยสำคัญ และการสร้างเขตวิกฤติ

ตัวอย่าง 4.37 สมมุติตัวแปรสุ่ม X แทนเส้นผ่าศูนย์กลางภายในของน๊อต และ $X \sim N(\mu, 1)$ ถ้าการผลิตน๊อตมีเส้นผ่าศูนย์กลางไม่ตรงตามข้อกำหนด (Specification) จะทำให้เสียค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้นเนื่องจากต้องปรับปรุงกระบวนการผลิตบางขั้นตอน

สมมุติผลกำไร T ต่อการผลิตน๊อตตัวหนึ่ง ๆ ปรากฏดังนี้

$$\begin{aligned} T &= C_1 \text{ (บาท)} && \text{ถ้า } 10 \leq X \leq 12 \\ &= -C_2 && \text{ถ้า } X < 10 \\ &= -C_3 && \text{ถ้า } X > 12 \end{aligned}$$

สมมุติกระบวนการผลิตนี้สามารถปรับค่าเฉลี่ยเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน (มิลลิเมตร) ของน็อต (μ) ไปได้เสมอเท่าที่ต้องการ อยากทราบว่าค่า μ ควรมีขนาดเท่าไรจึงจะทำให้ค่าคาดหมายในผลกำไร (Expected Profit) มีค่าสูงสุด

วิธีทำ

จากผลกำไร

$$
\begin{aligned}
T &= C_1 && \text{ถ้า } 10 \leqslant X \leqslant 12 \\
&= -C_2 && \text{ถ้า } X < 10 \\
&= -C_3 && \text{ถ้า } X > 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=> \quad E(T) &= C_1 Pr(10 \leqslant X \leqslant 12) + (-C_2)Pr(X < 10) + (-C_3)Pr(X > 12) \\
&= C_1 Pr(10 - \mu \leqslant Z \leqslant 12 - \mu) - C_2 Pr(Z < 10 - \mu) - C_3 Pr(Z > 12 - \mu) \\
&= C_1\{Pr(Z < 12 - \mu) - Pr(Z < 10 - \mu)\} - C_2 Pr(Z < 10 - \mu) \\
&\quad - C_3(1 - Pr(Z \leqslant 12 - \mu) \\
&= (C_1 + C_3)Pr(Z < 12 - \mu) - (C_1 + C_2)Pr(Z < 10 - \mu) - C_3 \\
&= (C_1 + C_3)\int_{-\infty}^{12-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - (C_1 + C_2)\int_{-\infty}^{10-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - C_3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ค่า μ ที่ทำให้ค่าคาดหมายของผลกำไรมีค่าสูงสุดคือค่า μ ที่ได้จาก $\frac{\partial}{\partial \mu} E(T) = 0$

$$
\begin{aligned}
=> \quad \frac{\partial}{\partial \mu} E(T) &= (C_1 + C_3)\int_{-\infty}^{12-\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\
&\quad - (C_1 + C_2)\int_{-\infty}^{10-\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - \frac{\partial C_3}{\partial \mu} = 0
\end{aligned}
$$

โดยอาศัยความรู้เรื่อง Differentiation of Integration (ดูเชิงอรรถท้ายทฤษฎี 3.6)

$$
\begin{aligned}
=> \quad \frac{\partial}{\partial \mu} E(T) &= (C_1 + C_3)(0 + (-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(12-\mu)^2/2} - 0) \\
&\quad - (C_1 + C_2)(0 + (-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(10-\mu)^2/2} - 0) + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
=> \quad -(C_1 + C_3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(12-\mu)^2/2} + (C_1 + C_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(10-\mu)^2/2} = 0
$$

$$
=> \quad \frac{(C_1 + C_3)}{(C_1 + C_2)} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(10-\mu)^2/2})/(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(12-\mu)^2/2})
$$

$$= e^{(12-\mu)^2/2-(10-\mu)^2/2}$$

$$= e^{(144-24\mu+\mu^2-100+20\mu-\mu^2)/2}$$

$$= e^{22-2\mu}$$

นั่นคือ $\frac{\partial}{\partial\mu}E(T) = 0 \Rightarrow e^{22-2\mu} = \frac{C_1 + C_3}{C_1 + C_2}$

ดังนั้น $22 - 2\mu = \ln(\frac{C_1 + C_3}{C_1 + C_2})$

$\Rightarrow$ $\mu = 11 - \frac{1}{2}\ln(\frac{C_1 + C_3}{C_1 + C_2})$

นั่นคือ ถ้าจะให้คาดหมายว่าจะสามารถได้ผลกำไรสูงสุดผู้ผลิตควรปรับขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายในของน๊อตจนกระทั่งได้เส้นผ่าศูนย์กลางเฉลี่ยมีขนาดเท่ากับ $11 - \frac{1}{2}\ln(\frac{C_1 + C_3}{C_1 + C_2})$ มิลลิเมตร

ในกรณีเฉพาะ สมมุติว่า $C_1 = 10$ บาท $C_2 = 8$ บาท และ $C_3 = 2$ บาท ดังนี้ค่า μ ที่ทำให้ E(T) มีค่าสูงสุดคือ $\mu = 11 - \frac{1}{2}\ln(\frac{10 + 2}{10 + 3}) = 11 - \frac{1}{2}\ln(\frac{12}{13}) = 11.04$ มิลลิเมตร ซึ่งค่าคาดหมาย (สูงสุด) ของผลกำไรที่สอดคล้องกับเส้นผ่าศูนย์กลางภายในเฉลี่ย $\mu = 11.04$ มิลลิเมตรนี้คือ

$$E(T) = (C_1 + C_3)\int_{-\infty}^{12-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - (C_1 + C_2)\int_{-\infty}^{10-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz - C_3$$

$$= 12\Pr(Z < 12 - 11.04) - 13\Pr(Z < 10 - 11.04) - 2$$

$$= 12\Pr(Z < 0.96) - 13\Pr(Z < -1.04) - 2$$

$$= 12(0.8314) - 13(0.1492) - 2$$

$= 6.04$ บาท

นั่นคือ ถ้ากระบวนการผลิตปรับเส้นผ่าศูนย์กลางภายในของน๊อตให้มีขนาดเท่ากับ 11.04 มิลลิเมตรแล้ว จะสามารถก่อให้เกิดผลกำไรในการผลิตสูงที่สุด คือมีผลกำไรถึง 6.04 บาทต่อน๊อต 1 ตัว

ตัวอย่าง 4.38 วิศวกรต้องการกะประมาณความคงทนของฐานรากตึกว่าจะทนทานและสามารถรับน้ำหนักกดดัน (Total Sustained Load) ได้มากเพียงใด โดยปกติน้ำหนักที่กดดันต่อฐานรากตึกเกิดจากน้ำหนัก 2 ส่วนคือน้ำหนักของตัวตึกและน้ำหนักของเครื่องเรือนและเครื่องใช้ต่าง ๆ และน้ำหนักแต่ละประเภทดังกล่าวเกิดจากผลรวมของน้ำหนักของปัจจัยที่เกี่ยวข้องต่าง ๆ มากมาย เหตุนี้วิศวกรจึงถือน้ำหนักของตัวตึก X (Dead Load) และน้ำหนักของเครื่องเรือนและเครื่องใช้ (Y) มีการแจกแจงแบบปกติ และเนื่องจากไม่อาจคาดหมายหรือมองเห็นสหสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักทั้งสองประเภทนี้ได้ง่ายจึงถือว่าน้ำหนักทั้งสองประเภทเป็นอิสระต่อกัน และจากสถิติการสร้างตึกขนาดและประเภทเดียวกันพบว่า

$$E(X) = 100 \text{ kips},\ V(X) = 100 \text{ kips},\ E(Y) = 40 \text{ kips},\ V(Y) = 100 \text{ kips}$$

โดยทั่วไปการคำนวณการรับน้ำหนักของฐานรากจำเป็นต้องออกแบบเผื่อไว้เล็กน้อยในลักษณะที่โอกาสน้ำหนักเกินกว่าอัตราถัวเฉลี่ยมีได้ประมาณ 5% ดังนี้ ถ้าท่านเป็นวิศวกรผู้นั้นท่านจะคำนวณการรับน้ำหนักของฐานรากไว้เท่าไร

วิธีทำ

ให้ X = น้ำหนักของตัวอาคาร

Y = น้ำหนักของเครื่องเรือนและเครื่องใช้

จากประสบการณ์ทราบว่า $X \sim N(100, 100)$, $Y \sim N(40, 100)$ และถือว่า X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน

ให้ W = น้ำหนักรวมของน้ำหนักตัวอาคารและเครื่องเรือนเครื่องใช้

=> $W \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

นั่นคือ $W \sim N(140, 200)$

ต้องการคำนวณการรับน้ำหนักของฐานเผื่อไว้ให้สามารถรับน้ำหนักที่มีโอกาสเกิดขึ้นสูงกว่าอัตราเฉลี่ย 5%

=> $\Pr(W > w) = 0.05 \quad w = ?$

=> $\Pr\left(\dfrac{W - E(W)}{\sigma_W} > \dfrac{w - 100}{14.1}\right) = 0.05$

$\Pr\left(Z > \dfrac{w - 100}{14.1}\right) = 0.05 = \Pr(Z > 1.645)$

=> $\dfrac{w - 100}{14.1} = 1.645$

$w = (14.1)(1.645) + 100 = 163 \text{ kips}$

แสดงว่า วิศวกรควรออกแบบฐานรากตึกให้สามารถรับน้ำหนักได้ 163 kips เพื่อให้สามารถรับน้ำหนักที่อาจเพิ่มขึ้นได้เกินกว่าน้ำหนักถัวเฉลี่ย โดยคาดว่าโอกาสที่จะเกิดน้ำหนักเพิ่มขึ้นเช่นนี้มีอยู่ประมาณ 5%

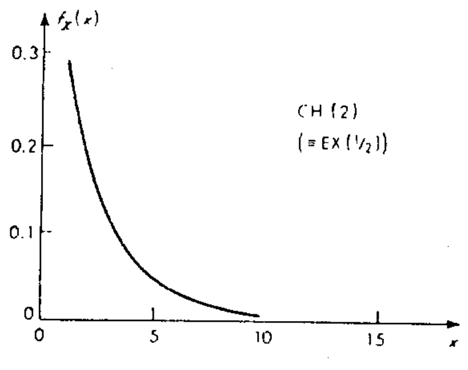
4.2.5 การกระจายของตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวเนื่องกับการแจกแจงปกติ (Normal Related Distribution, χ^2, χ, t, F)

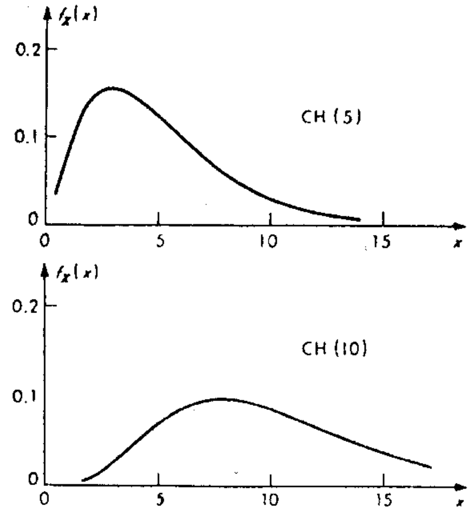
การแจกแจงแบบ χ^2, t และ F ได้กล่าวถึงไว้แล้วเป็นส่วนมากโดยเฉพาะในบทที่ 3 เฉพาะการแจกแจงแบบ χ^2 ได้กล่าวถึงไว้อีกครั้งหนึ่งในตอน 4.2.2 ในฐานะกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมม่า G(r, λ) เมื่อ $r = n/2, \lambda = \frac{1}{2}$ มีเพียงการแจกแจงแบบ χ (Chi-Distribution) เท่านั้นที่ยังมิได้กล่าวถึง

อย่างไรก็ตามจะได้กล่าวถึงการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่ 4 นี้อีกครั้งหนึ่งเพื่อเป็นการสรุปแยกไว้ต่างหาก เนื่องจากเป็นการแจกแจงที่ถูกนำไปใช้บ่อยครั้งที่สุด โดยเฉพาะในงานที่เกี่ยวกับการทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย (μ) และค่าความแปรปรวน (σ^2) ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ

ก. การแจกแจงแบบไคกำลังสอง (χ^2-Dstribution)

ตัวแปรสุ่ม χ^2 คือตัวแปรสุ่มที่พัฒนาขึ้นมาจากฟังก์ชั่นของตัวแปรสุ่มปกติ กล่าวคือ ถ้า $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$; i = 1, 2, ..., n หรือกรณีเฉพาะเมื่อ $X_i \sim N(0, 1)$, i = 1, 2, ..., n แล้ว ตัวแปรสุ่ม (ตัวสถิติ) $Y = \sum_i^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$ หรือ $Y = \sum_i^n \left(\frac{X_i - 0}{1}\right)^2 = \sum_i^n X_i^2$ จะมีการแจกแจงแบบ χ^2 มี df เท่ากับ n มีค่าคาดหมายเท่ากับ n และค่าความแปรปรวนเท่ากับ 2n และ mgf. เท่ากับ $\left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{n/2}$ (ดูบทที่ 3) ภาพของการแจกแจงแบบ χ^2 ปรากฏดังนี้ ขอให้สังเกตุว่าเมื่อ df มีค่าสูงเส้นโค้งจะสมมาตร





χ^2 distributions.

ตัวสถิติ $Y = \sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i})^2$ และ $Y = \sum_{i}^{n} X_i^2$ ถูกนำไปใช้มากโดยเฉพาะในการประมาณค่าและสร้างตัวทดสอบสำหรับตรวจสอบนัยสำคัญทางสถิติเกี่ยวกับความแปรปรวน (σ^2) ของกลุ่มประชากรปกติทั้งในกรณีพารามิเตอร์เดี่ยวและหลายพารามิเตอร์ เช่น

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

หรือ $\quad H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

หรือ $\quad H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ (Bartlett's Test)

นอกจากนี้หลักการของ χ^2 ยังถูกนำไปใช้ในการทดสอบ Goodness of Fit และความเป็นอิสระระหว่างคุณลักษณะทางประชากร (Contingency Table) โดยเริ่มพัฒนาตัวทดสอบขึ้นมาจากการกระจายพหุนามก่อน แล้วจึง "ประมาณ" p.d.f. ของตัวทดสอบด้วยการกระจายแบบ χ^2

สำหรับกรณี $Y = \sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i})^2$ ได้เคยเสนอไว้โดยละเอียดแล้วในบทที่ 3 ในที่นี้จะเสนอเฉพาะกรณี $Y = \sum_{i}^{n} X_i^2$ แล้วพัฒนาเพื่อหา pdf ค่าคาดหมาย ความแปรปรวน และ mgf ไปตามลำดับ

---

[1] กรณีเฉพาะที่นำไปใช้บ่อยครั้งคือกรณีที่ $\mu_i = \mu$; $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $\sigma_i^2 = \sigma^2$; $i = 1, 2, \ldots, n$ ทั้งนี้เพราะเกี่ยวข้องกับเรื่องของ การสุ่มตัวอย่าง·เช่นสุ่มตัวอย่างมาเพื่อทดสอบสมมุติฐานของกลุ่มประชากร

เนื่องจาก $X_i \sim N(0, 1); i = 1, 2, ..., n$

$$=> \qquad Y = \sum_{i}^{n} X_i^2$$

พิจารณาตัวสถิติ Y_1 เฉพาะเมื่อเกิดจาก X เพียงตัวเดียว คือ $Y_1 = X_1^2$ จะพบว่า

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(y) &= Pr(Y_1 \leq y) \\ &= Pr(X_1^2 \leq y) \\ &= Pr(-\sqrt{y} \leq X_1 \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2_1/2} dx_1 \end{aligned}$$

โดยอาศัย Differentiation of Integration

$$\begin{aligned} => \qquad f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} dx_1 \\ &= 0 + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} - (-\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}) \\ &= \frac{2}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y/2} \\ &= (\frac{1}{2})^{1/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{-1/2} e^{-y/2} \end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้า $X_i \sim N(0, 1)$ แล้วตัวแปร $Y_1 = X_1^2$ จะมี pdf ดังนี้

$$f_{Y_1}(y) = (\frac{1}{2})^{1/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{-1/2} e^{-y/2} \; ; \; y \geq 0$$

เรียกฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นนี้ว่าการแจกแจงแบบไคกำลังสองที่มี df = 1 หรือ $\chi^2_{(1)}$
ขอให้สังเกตุว่า $Y_1 \sim G(r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2})$

ดังนั้น โดยอาศัยความรู้จากตอน 4.2.2 จะพบว่า

$$M_{Y_1} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{1/2}, E(Y_1) = 1 \text{ และ } V(Y_1) = 2$$

กรณี $Y = \sum_i^n X_i^2$ หรือ $Y = \sum_i^n Y_i$ จะพบว่า

$$M_Y(t) = \prod_i^n M_{Y_i}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$$ ซึ่งก็คือกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมม่าคือ $G(r = n/2, \lambda = \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \frac{1}{\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} ; y \geqslant 0$$

หรือตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_i^n X_i^2$ มีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n)}$ มีค่าคาดหมายคือ $E(Y) = n$ และความแปรปรวน $V(Y) = 2n$

ข. การแจกแจงแบบไค (χ -Distribution)

ถ้า $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2); i = 1, 2, \ldots, n$ หรือ $X_i \sim N(0, 1); i = 1, 2, \ldots, n$ และพบว่า $Y = \sum_i^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$ หรือ $Y = \sum_i^n X_i^2$ มีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n)}$ แล้ว รากที่สองของ Y คือ $W = (+)\sqrt{y}$ จะมีการแจกแจงแบบ χ มี df = n หรือ $\chi_{(n)}$

การแจกแจงแบบไค (χ) ถูกนำไปใช้ในการพัฒนาตัวแปรสุ่ม t ซึ่งจะได้กล่าวถึงในลำดับต่อไป แต่โดยทั่วไปเรามักไม่ค่อยพูดถึงการแจกแจงแบบ χ เมื่อกล่าวถึงการแจกแจงแบบ t แต่กลับพูดถึงรากที่สองของตัวแปรสุ่ม χ^2 ซึ่งโดยข้อเท็จจริงแล้วก็คือสิ่งเดียวกัน

เนื่องจาก $Y \sim \chi^2_{(n)} ; y \geqslant 0$

ให้ $$W = (+)\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \quad F_W(w) = Pr(W \leqslant w)$$

$$= Pr(\sqrt{y} \leqslant w)$$

$$= \Pr(Y \leqslant w^2)$$

$$= \int_0^{w^2} (\frac{1}{2})^{n/2} \frac{1}{\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} dy$$

$$=> \quad f_w(w) = \frac{d}{dw} F_w(w) = \frac{d}{dw} \int_0^{w^2} (\frac{1}{2})^{n/2} \frac{1}{\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} dy \; ^1$$

$$= 0 + 2w(\frac{1}{2})^{n/2} \cdot \frac{1}{\Gamma(n/2)} (w^2)^{n/2-1} e^{-w^2/2} - 0$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} w(w^2)^{n/2-1} e^{w^2/2} \; ; \; w \geqslant 0$$

นั่นคือ pdf ของตัวแปรสุ่ม $\chi_{(n)}$ คือ

$$f_w(w) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} w(w^2)^{n/2-1} e^{-w^2/2} \; ; \; w \geqslant 0$$

สำหรับค่าคาดหมาย E(W) และความแปรปรวน V(W) สามารถคำนวณหาได้ดังนี้

$$E(W) \quad \int_0^{\infty} w f_w(w) dw$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} (w^2)^{n/2} e^{-w^2/2} dw$$

ให้ $s = w^2/2$ ดังนั้น $dw = \frac{1}{\sqrt{2s}} ds$

$$=> \quad E(W) = \int_0^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{-1/2}}{\Gamma(n/2)} s^{(n-1)/2} e^{-s} ds$$

---

[1] ค่าของ Y เริ่มตั้งแต่ 0 เป็นต้นไป เราจึง Integrate จาก 0 ถึง w^2 ขอให้ย้อนเปรียบเทียบกับกรณีของ χ^2 ในตอน (n)

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty s^{(n+1)/2} e^{-s} ds$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty s^{(n+1)/2-1} e^{-s} ds$$

$$= \frac{\sqrt{2}\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}$$

และเนื่องจาก $W = \sqrt{Y}$ หรือ $Y = w^2$ โดยที่ $Y \sim \chi^2_{(n)}$

=> $E(W^2) = E(Y) = n$

ดังนั้น

$$V(W) = E(W^2) - (E(W))^2$$

$$V(W) = n - \frac{2\Gamma^2((n+1)/2)}{\Gamma^2(n/2)}$$

นั่นคือ ตัวแปรสุ่ม $\chi_{(n)}$ ซึ่งเกิดจากรากที่สองของ $\chi^2_{(n)}$ จะมี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_W(w) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} w(w^2)^{n/2-1} e^{-w^2/2} ; w \geqslant 0$$

$$E(W) = \frac{\sqrt{2}\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}$$

และ

$$V(W) = n - \frac{2\Gamma^2((n+1)/2)}{\Gamma^2(n/2)}$$

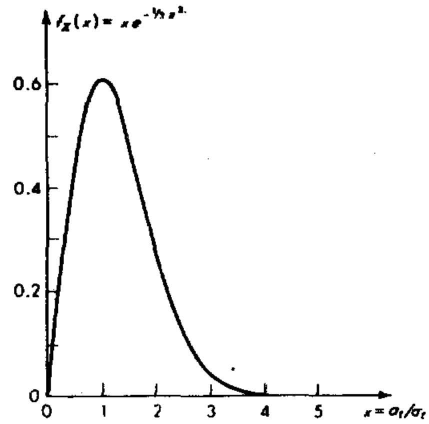
กรณีเฉพาะที่สำคัญคือ

(1) เมื่อ $n = 2$ (หรือรากที่สองของผลรวมกำลังสองของตัวแปรสุ่มปกติ 2 ตัว) จะพบว่าการแจกแจงแบบ χ จะลดรูปลงเป็นการแจกแจงรูปใหม่เรียกว่า Rayleigh Distribution ซึ่งมี pdf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_W(w) = we^{-w^2/2} \; ; \; w \geqslant 0$$

$$E(W) = \sqrt{2}\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi/2} \text{ และ } V(W) = 2 - 2\Gamma^2(3/2) = 2 - \pi/2$$

ภาพของ Rayleigh Distribution ปรากฏดังนี้



Rayleigh or χ (with n= 2) distribution.

(2) เมื่อ n = 3 การกระจาย χ จะลดรูปเป็นการกระจายแบบใหม่ เรียกว่า Maxwell's Distribution มี pdf ค่าคาดหมาย และความแปรปรวนดังนี้

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(3/2)} w^2 e^{-w^2/2} \; ; \; w \geq 0$$

$$= \sqrt{2/\pi}\, w^2 e^{-w^2/2} \; ; \; w \geq 0$$

$$E(W) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - 0.62678^{1}$$

$$V(W) = 3 - \frac{2}{\Gamma^2(3/2)} = 3 - 0.4432 = 2.5568$$

---

[1] n. เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มหรือเศษส่วน, n > 0 แล้ว $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ดังนั้นจะเห็นว่า

$$\Gamma(3/2) = \Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ข. เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มลบหรือเศษส่วนลบ n < C แล้ว $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$

$$\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-3/2} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{3/2} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{(-3/2)(-1/2)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{3/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{3/4} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

ค. ตัวแปรสุ่มแบบที (Student t Distribution)

การแจกแจงแบบ t เป็นการกระจายที่ได้รับความนิยมและมีผู้นำไปใช้ในการวิจัยหรืออนุมานทางสถิติอย่างกว้างขวาง ทั้งนี้ก็ด้วยเหตุผลสำคัญ 2 ประการคือ

1. เนื่องจากการกระจายแบบ t พัฒนาขึ้นมาจากการใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ดังนั้นในงานวิจัยหรือการอนุมานทางสถิติจำเป็นหรือมีข้อจำกัดให้ต้องใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ($n < 30$) จึงยังคงสามารถปฏิบัติได้ และให้ผลลัพธ์ที่น่าเชื่อถือเมื่อดำเนินการวิจัยหรืออนุมานโดยอาศัยตัวสถิติ t

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n - 1}}$$

2. ในกรณีที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน σ^2 ของกลุ่มประชากร การวิจัยหรือการอนุมานทางสถิติก็ยังคงดำเนินการต่อไปได้เมื่อใช้ตัวสถิติ t ทั้งนี้เพราะ t อาศัย s แทน

$$\text{ตัวสถิติ} \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n - 1}} \sim t_{n-1}$$

การกระจายแบบ t พัฒนาขึ้นมาดังนี้

ถ้า ตัวแปรสุ่ม $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots . n$ เป็นอิสระต่อกัน และ $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$

1 ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นแบบ t นำเสนอเป็นครั้งแรกในปีค.ศ. 1908 โดย W.S. Gosset สมัยนั้น Gosset ทำงานอยู่ในโรงงานเบียร์ของชาวไอริช และทางโรงงานไม่ยินยอมหรืออนุญาตให้พนักงานของโรงงานพิมพ์เผยแพร่ผลงานวิจัยใด ๆ และด้วยข้อบังคับนี้ Gosset จึงลักลอบพิมพ์เสนอผลงานโดยใช้นามแฝงว่า “Student” ดังนั้นการแจกแจงแบบ t จึงเรียกว่า Student t Distribution หรือ t-Distribution

การสร้างโมเดลการแจกแจงนี้ Gosset ถือว่า กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ถูกสุ่มมาจากกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นงานวิเคราะห์วิจัยใดที่จะวิเคราะห์ด้วย t จึงต้องเป็นงานที่กลุ่มตัวอย่างที่ใช้นั้นสุ่มมาจากประชากรปกติ แต่อย่างไรก็ตามแม้ว่ากลุ่มประชากรเดิมจะไม่มีการแจกแจงแบบปกติ แต่รูปร่างของการแจกแจงมีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำก็สามารถนำการแจกแจงแบบ t ไปใช้ในการวิเคราะห์วิจัยได้ดีเช่นกัน

แล้วตัวแปรสุ่ม $Y = \dfrac{Z_i}{\sqrt{(Z_1^2 + Z_2^2 + \dots Z_n^2)/n}}$ จะมีการแจกแจงแบบ t มี df = n

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

ถ้า ตัวแปรสุ่ม $X \sim N(0, 1)$ และตัวแปรสุ่ม $U \sim X_{(n)}$ โดยที่ X และ U เป็นอิสระต่อกัน แล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = \dfrac{X}{V/\sqrt{n}}$ จะมีการแจกแจงแบบ t มี df = n

หรือ

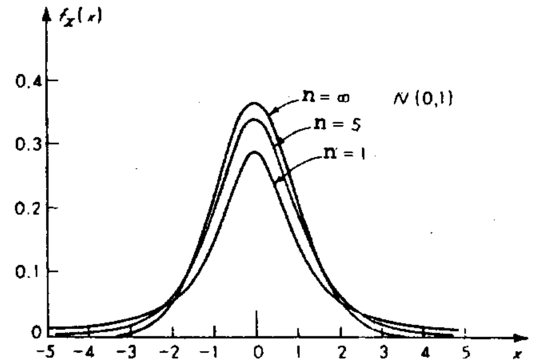
ถ้า ตัวแปรสุ่ม $X \sim N(0, 1)$ และตัวแปรสุ่ม $V \sim \chi^2_{(n)}$ โดยที่ X และ U เป็นอิสระต่อกัน แล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = \dfrac{X}{\sqrt{V/n}}$ จะมีการแจกแจงแบบ t มี df = n

และพบว่า

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1 + \frac{y^2}{n})^{-(n+1)/2} \; ; \; -\infty < y < \infty$$

$$E(Y) = 0 \text{ และ } V(Y) = \frac{n}{n-2} \; ; n > 2$$

ภาพของการแจกแจงแบบ t ปรากฏดังต่อไปนี้ ขอให้สังเกตว่า $V(Y) = \dfrac{n}{n-2}$ แสดงว่า n ต้องมีค่าอย่างน้อยเท่ากับ 3 และเมื่อ $n \to \infty$ การแจกแจงแบบ t จะลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ



The t distribution. (From A. Hald, "Statistical Theory with Engineering Applications," John Wiley and Sons, New York, 1952.)

พิสูจน์

$X \sim N(0, 1)$ และ $V \sim \chi^2_{(n)}$

$$=> \quad f_{X,V}(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-v/2} \; ; \; -\infty < x < \infty ; -\infty < v < \infty$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n/2)} \cdot v^{n/2-1} e^{-(x^2+v)/2}$$

ให้ $$Y = \frac{X}{\sqrt{V/n}} \text{ และ } S = V$$

โดยอาศัยเทคนิคการแปลงรูปตัวแปรสุ่ม (Transformation of Random Variables Technique)

$$f_{Y,S}(y, s) = f\{y^{-1}(x, v), s^{-1}(x, v)\} J^{+}(\frac{X, V}{Y, S})$$

จาก $$Y = \frac{X}{\sqrt{V/n}} \text{ และ } S = V$$

$$=> \quad V = S \text{ และ } X = \frac{Y\sqrt{S}}{\sqrt{n}}$$

$$J(\frac{X, V}{Y, S}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{s/n} & y/2\sqrt{ns} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{s/n}$$

ดังนั้น

$$f_{Y,S}(y, s) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n/2)} s^{n/2-1} e^{-(sy^2/n+s)/2} \cdot \sqrt{s/n} \; ; 0 < s < \infty, \; -\infty < y \; \infty$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2n\pi}\Gamma(n/2)} s^{n/2-1/2} e^{-(sy^2/n+s)/2}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2n\pi}\Gamma(n/2)} s^{(n-1)/2} e^{-s/2(y^2/n+1)} \; ; 0 < s < \infty, \; -\infty < y < \infty$$

ต้องการหา Marginal pdf ของ $Y = \dfrac{X}{\sqrt{V/n}}$

$$=> \quad f_Y(y) \quad = \quad \int_0^{\infty} f_{Y,S}(y, s)dx$$

$$=> \quad f_Y(y) \quad = \quad \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2n\pi}\Gamma(n / 2)} \int_0^{\infty} s^{(n-1)/2} e^{-s/2(y^2/n+1)} ds$$

ให้ $\frac{s}{2}(y^2/n + 1) \quad = \quad w \;=> s = 2w/(y^2/n + 1)\,,\, ds = \dfrac{2}{(y^2/n+1)}$

$$=> \quad f_Y(y) \quad = \quad \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2n\pi}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} \left(\frac{2w}{(y^2/n + 1)}\right)\left(\frac{y^2}{n} + 1\right), ds = \frac{2}{(\frac{y^2}{n} + 1)} dw$$

$$= \quad \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2n\pi}\Gamma(n/2)} \left(\frac{2}{y^2/n + 1}\right)^{(n+1)/2} \int_0^{\infty} w^{(n-1)/2} e^{-w} dw$$

$$= \quad \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\sqrt{2n\pi}\,\Gamma(n/2)} \cdot \frac{1}{(y^2/n + 1)^{(n+1)/2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)/2} \Gamma\{(n + 1)/2\}$$

$$= \quad \frac{\Gamma\{(n + 1)/2\}}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)/2} \cdot \left(\frac{1}{y^2/n + 1}\right)^{(n+1)/2}$$

นั่นคือ

$$f_Y(y) \quad = \quad \frac{\Gamma\{(n + 1)/2\}}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} (1 + y^2/n)^{-n+1/2} \quad ; \quad -\infty < y < \infty$$

สำหรับการพิสูจน์ว่า $E(Y) = 0$ และ $V(Y) = \dfrac{n}{n-2}$ นั้นนักศึกษาสามารถพิสูจน์ได้เอง โดยไม่ยากนัก จะขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ค่าของ t และพื้นที่ใต้โค้งที่สอดคล้องกับค่าของ t ปรากฏอยู่ในตารางท้ายเล่ม นักศึกษาไม่จำเป็นต้องคำนวณหาเองจาก $f_Y(y)$ ให้ยุ่งยาก ตัวอย่างเช่นต้องการหาความน่าจะเป็น $Pr(1.316 < Y < 2.060)$ และค่า t ที่ทำให้ $Pr(Y < t) = .975$ ทั้งนี้กำหนดให้ $n = 25$ จะพบว่า

$$\text{ก. } Pr(1.316 < Y < 2.060) = \int_{1.316}^{2.060} \frac{(26/6)}{(25/2)\sqrt{25\pi}} (1 + y^2/25)^{-26/2}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(13)}{\Gamma(25/2)\sqrt{25\pi}} \int_{1.316}^{2.060} (1 + y^2/25)^{-13}\,dy$$

$$= .975 - .90 = .075$$

ข. หาค่า t ที่ทำให้ $Pr(Y < t) = .975 \quad t = ?$

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma(13)}{\Gamma(25/2)\sqrt{25\pi}} (1 + y^2/25)^{-13}\,dy = .975$$

จากตาราง t จะได้ว่า $\int_{-\infty}^{2.06} \frac{\Gamma(13)}{\Gamma(25/2)\sqrt{25\pi}} (1 + y^2/25)^{-13}\,dy = .975$

$\Rightarrow \quad t = 2.060$

หรือ ณ. ค่า $t = 2.060$ จะทำให้ $Pr(Y < t) = .975$

นอกจากวิธีคำนวณดังกล่าวข้างต้น เรายังสามารถใช้ทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลาง (CLT) คำนวณหาได้เป็นอย่างดี ทั้งนี้เพราะการแจกแจงแบบ t พัฒนาขึ้นมาจากการกระจายแบบปกติการประมาณ จึงให้ค่าประมาณค่อนข้างถูกต้อง จะแสดงให้เห็นดังนี้

$$\text{ก. } Pr(1.316 < Y < 2.060) = Pr\left(\frac{1.316 - 0}{\sqrt{25/(25-2)}} < \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y} < \frac{2.060 - 0}{\sqrt{25/(25-2)}} \right)$$

$$= Pr(1.262 < Z < 1.976)$$

$$= .9756 - .8962 = .079$$

ข. หาค่า t ที่ทำให้ $\Pr(Y < t) = .975$

$$\Pr(Y<t) = .975$$

$$=> \quad \Pr\left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y} < \frac{t - 0}{\sqrt{25/(25 - 2)}}\right) = .975$$

$$\Pr\left(Z < \frac{t}{1.042572}\right) = .975 = \Pr(Z < 1.96)$$

$$=> \quad \frac{t}{1.042572} = 1.96$$

ดังนั้น $t = (1.96)(1.042572) = 2.043$

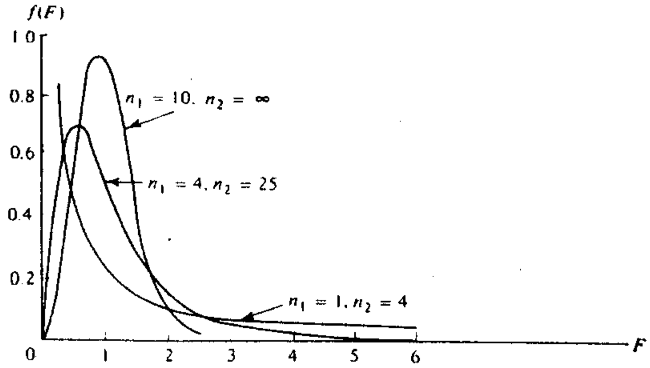
ง. การแจกแจงแบบเอฟ (Snedecor's Distribution or F-Distribution)

การแจกแจงแบบ F เป็นการแจกแจงที่ได้รับความนิยมและถูกนำไปใช้ในงานวิจัยอย่างกว้างขวาง ไม่แพ้การแจกแจงแบบ t โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานทดสอบข้อสมมุติฐานที่เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยหลายตัว (Several Parameters) เช่น $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$; $r = 2, 3, \ldots, n$ การวิเคราะห์ความแปรปรวนและการทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ β ในการวิเคราะห์ความถดถอย

การแจกแจงแบบ F พัฒนามาจากการแจกแจงแบบปกติดังนี้

ถ้า $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ โดยที่ X_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นอิสระต่อกัน Y_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นอิสระต่อกัน และ X_i เป็นอิสระกับ Y_i แล้ว

ตัวแปรสุ่ม $W = \dfrac{U/m}{V/n} = \dfrac{\sum_i^m \left(\dfrac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2/m}{\sum_i^n \left(\dfrac{Y_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2/n} = \dfrac{\sum_i^m Z_i^2/m}{\sum_i^n Z_i^2/n}$ จะมีการแจกแจงแบบ F มี $df = m, n$ โดยที่ $Z_i \sim N(0, 1)$



Graphs of probability density functions of the F distribution.

หรืออีกนัยหนึ่ง

ถ้าตัวแปรสุ่ม $U \sim \chi^2_{(m)}$ และ $V \sim \chi^2_{(n)}$ โดยที่ U และ V เป็นอิสระต่อกันแล้ว ตัวแปรสุ่ม $W = \dfrac{U/m}{V/n}$ จะมีการกระจายแบบ F มี df = m, n หรือ $F_{(m,n)}$

pdf ของตัวแปรสุ่ม W ปรากฏดังนี้

$$f_W(w) = \frac{\Gamma\{(m+n)/2\}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{1}{(1+(m/n)w)^{(m+n)/2}} w^{(m-2)/2}; 0 < w < \infty$$

โดยที่ $E(W) = \dfrac{n}{n-2}$; $n > 2$ และ $V(W) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$; $n > 4$

เส้นโค้งแสดงการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม F ปรากฏดังต่อไปนี้ ขอให้สังเกตว่าโค้งของ-F มีลักษณะเดียวกับโค้งของ χ^2

จะเห็นได้ว่าการแจกแจงแบบ F พัฒนาขึ้นมาจากการแจกแจงแบบปกติกล่าวคือเกิดจากอัตราส่วน (Ratio) ระหว่างผลรวมกำลังสองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ N(0, 1) ที่ถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวข้อง (m และ n) บางครั้งเราอาจเรียกตัวแปรสุ่ม F ว่า Variance Ratio ตามลักษณะความเป็นมาของมันและให้ข้อสังเกตว่า (ดู V(W)) n จะต้องโตกว่า 4 เสมอ (ดูรูป) ส่วน m ไม่มีข้อจำกัดเข้มงวดมากนัก

pdf ของตัวแปรสุ่ม W พัฒนาขึ้นมาดังนี้

$U \sim \chi^2_{(m)}$ และ $V \sim \chi^2_{(n)}$ โดยที่ U และ V เป็นอิสระต่อกัน

$$f_U(u) = \frac{(\frac{1}{2})^{m/2}}{\Gamma(m/2)} u^{m/2-1} e^{-u/2} \; ; \; u \geq 0$$

และ

$$f_V(v) = \frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-v/2} \; ; \; v \geq 0$$

ดังนั้นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วม (Joint pdf) ของตัวแปรสุ่ม U, V คือ

$$f_{U,V}(u, v) = \{\frac{(\frac{1}{2})^{m/2}}{\Gamma(m/2)} u^{m/2-1} e^{-u/2}\} \{\frac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-v/2}\}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{(n+n)/2}}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)} u^{m/2-1} v^{n/2-1} e^{-(u+v)/2} \; ; \; u \geq 0, v \geq 0$$

ให้ $W = \frac{U/m}{V/n}$ และ $S = V$

$\Rightarrow V = S, \; U = \frac{mWS}{n}$

$$J(\frac{U, V}{W, S}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{ms}{n} & \frac{mw}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{ms}{n}$$

$$f_{W,S}(w, s) = \frac{(\frac{1}{2})^{(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} (\frac{mws}{n})^{m/2-1} s^{n/2-1} e^{-(mws/n+s)/2} \cdot \frac{(ms)}{n}$$

$$= \frac{(\frac{m}{n})^{m/2} (\frac{1}{2})^{(m+n)/} w^{m/2-1} s^{(m+n-2)/2} e^{-s/2.(mw/n+1)}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \; ; s \geq 0, w \geq 0$$

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_{W,S}(w, s)ds$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} w^{m/2-1} \int_0^\infty s^{(m+n-2)/2} e^{-s/2.(mw/n+1)} ds$$

ให้ $s/2(mw/n + 1) = t \Rightarrow s = \frac{2nt}{mw + n}$; $ds = \frac{2n}{mw + n} dt$

$$\Rightarrow \quad f_W(w) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(m+n)/2}}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)} \cdot w^{m/2-1}\left(\frac{2n}{mw + n}\right)^{(m+n)/2} \int_0^\infty t^{(m+n-2)/2} e^{-t} dt$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(m+n)/2}(m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} w^{m/2-1}\left(\frac{2n}{mw + n}\right)^{(m+n)/2} \Gamma\{(m + n)/2\}$$

$$= \frac{\Gamma((m + n)/2)(m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{n}{mw + n}\right)^{(m+n)/2} w^{m/2-1}$$

$$\Rightarrow \quad f_W(w) = \frac{\Gamma((m + n)/2)(m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{1}{1 + (m/n)w}\right)^{(m+n)/2} w^{m/2-1} \; ; \; 0 < w < \infty$$

สำหรับการพิสูจน์เพื่อหาค่า E(W) และ V(W) สามารถกระทำได้ไม่ยากนัก จึงขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด ส่วนการหาพื้นที่ใต้โค้ง (ความน่าจะเป็น) และค่าของ F ที่สอดคล้องกับพื้นที่ใต้โค้ง นักศึกษาสามารถดำเนินการได้ในทำนองเดียวกันกับการแจกแจงแบบ t คือสามารถคำนวณหาได้จากการอินทรีเกรต $f_W(w)$ การคำนวณโดยอาศัยตาราง F และการคำนวณหาค่าประมาณโดยใช้ CLF การใช้ CLT สำหรับการแจกแจงแบบ F ก็ให้ผลค่อนข้างแม่นยำเช่นเดียวกันกับการแจกแจงแบบ t ทั้งนี้เพราะ F พัฒนามาจากการแจกแจงแบบปกติ

ตัวอย่างเช่น ต้องการหา $Pr(1.50 \leq W \leq 4.30)$ และค่าของ F ที่ทำให้ '$Pr(W < F) = .95$ โดยที่ กำหนดให้ $m = 10, n = 12$ จะพบว่า

ก. $\Pr(1.50 \leqslant W \leqslant 4.30) = \dfrac{\Gamma((10+12)/2)(10/12)^{10/2}}{\Gamma(10/2)\Gamma(12/2)} \int_{1.5}^{4.3} \dfrac{1}{1 + (10/12)w})^{(10+12)/2} w^{10/2} dw$

$$= \frac{\Gamma(11)(10/12)^5}{\Gamma(5)\Gamma(6)} \int_{1.5}^{4.3} \frac{1}{1 + (10/12)w})^{11} w^5 dw$$

$= 0.99 - 0.75$ (จากตาราง F ท้ายเล่ม)

$= 0.24$

หรือโดยอาศัย CLT

พบว่า $E(W) = \dfrac{n}{n-2} = \dfrac{12}{12-2} = \dfrac{12}{10} = 1.2$

$$V(W) = \frac{2n^2(m + n - 2)}{m(n-2)^2(n-4)} = \frac{2(12)^2(10 + 12 - 2)}{10(12-2)^2(12-4)} = 0.72$$

$$\sigma_W = 0.84$$

ดังนั้น

$$\Pr(1.5 \leqslant W \leqslant 4.3) = \Pr\left(\frac{1.5 - 1.2}{.84} \leqslant \frac{W - E(W)}{\sigma_w} \leqslant \frac{4.3 - 1.2}{.84}\right)$$

$$\simeq \Pr(0.36 \leqslant Z \leqslant 3.69)$$

$$\simeq .9999 - .6406$$

$$\simeq 0.2583$$

ข. หาค่า F ที่ทำให้ $\Pr(W < F) = .95$, $m = 10$, $n = 12$

$$\Pr(W < F) = \frac{\Gamma(11)(10/12)^5}{\Gamma(5)\Gamma(6)} \int_0^F (\frac{1}{1 + (10/12)w})^{11} w^5 dw = .95$$

แต่ $$.95 = \frac{\Gamma(11)(10/12)^5}{\Gamma(5)\Gamma(6)} \int_0^{2.76} (\frac{1}{1 + (10/12)w})^{11} w^5 dw$$

(จากตาราง F)

$\Rightarrow$ $F = 2.76$

หรือโดยอาศัย CLT จะพบว่า

$$\Pr(W < F) = .95$$

$$\Rightarrow \quad \Pr\left(\frac{W - E(W)}{W} < \frac{F - 1.2}{0.84}\right) = .95 = \Pr(Z < 1.645)$$

$$\Rightarrow \quad \Pr\left(Z < \frac{F - 1.2}{0.84}\right) = \Pr(Z < 1.645)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F - 1.2}{0.84} = 1.645$$

$$F = 1.2 + (1.645)(0.84) = 2.58$$

สรุปฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่สำคัญ

ก. ตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน

ชื่อ	ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น	mgf	ค่าคาดหมาย	ความแปรปรวน	หมายเหตุ
1. ยูนิฟอร์ม (Discrete (Uniform)	$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{เมื่อ } x = 1, 2, \ldots, N \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_x(t) = \sum_{j=1}^{N} e^{jt} \cdot \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	
2. เบอร์นุลลิ (Bernoulli)	$f_x(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & \text{เมื่อ } x = 0 \text{ หรือ } x = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_x(t) = q + pe^t$	p	pq	
3. ทวินาม (Binomial)	$f_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_x(t) = (q + pe^t)^n$	np	npq	
4. อนุกรมเรขาคณิต (Geometric)	$f_x(x) = \begin{cases} pq^{x-1} & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_x(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	x = จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดที่ดำเนินการจนได้ Success ครั้งแรก
	หรือ				
	$f_x(x) = \begin{matrix} pq^x & x = 0, 1, 2, \ldots. \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{matrix}$	$M_x(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	X = จำนวน Failure ทั้งหมดที่เกิดขึ้นก่อนที่จะได้ Success ครั้งแรก

ตัวแปรสุ่มใดเหมาะสำหรับสถานการณ์เช่นใดให้นักศึกษาย้อนไปศึกษาบทที่ 4 ซึ่งกล่าวถึงไว้แล้วโดยละเอียด

ชื่อ	ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น	mgf	ค่าคาดหมาย	ความแปรปรวน	หมายเหตุ
5. นิเสธทวินาม (Negative Binomial)	$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}; x = r, r+1, r+2, \ldots \\ 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	X = จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดที่กระทำจนได้ Success ครบ r ครั้ง
	หรือ		(หรือ $\frac{rq}{p} + r$)		
	$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{x} p^{r-1} q^x; x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	x = จำนวน Failure ทั้งหมดที่มีอยู่ในการทดลองจนกว่าจะได้ Success ครบ r ครั้ง
6. พัวซอง (Poisson)	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > 0 \\ 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	
7. ไฮเปอร์จีโอเมตริกซ์ (Hypergeometric)	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad ; x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	ไม่ให้ประโยชน์	$\frac{nk}{N}$	$\frac{nk}{N} \cdot \frac{N-k}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$	
8. พหุนาม (multinomial)	$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$; $\sum_i^k p_i = 1, \sum_i^k x_i = n$	ไม่ให้ประโยชน์	np_i; $i = 1, 2, \ldots, k$	$np_i q_i$; $i = 1, 2, \ldots, k$	

ข. ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ชื่อ	ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น	mgf	ค่าคาดหมาย	ความแปรปรวน	
1. เอกโพเนนเชียล (Exponential)	$EX(\lambda) = f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} ; x \geqslant 0; \lambda > 0 \\ 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$; $t<\lambda$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	
2. แกมม่า (Gamma)	$G(r, \lambda) = f_X(x) = \begin{cases} \lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} ; x \geqslant 0, \lambda>0, r>0 \\ 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$	$M_X(t) = (\dfrac{\lambda}{\lambda - t})^r$	$\dfrac{r}{\lambda}$	$\dfrac{r}{\lambda^2}$	
3. เบต้า (Beta)	$BT(r,t) = f_X(x) = \dfrac{1}{\beta(r,t-r)} x^{r-1}(1-x)^{t-r-1}$; และ ; $0 \leqslant x \leqslant 1,\ r>0, t-r>0$	ไม่ให้ประโยชน์	$\dfrac{r}{t}$	$\dfrac{r}{t} \dfrac{(1-r/t)}{t+1}$	กรณีเฉพาะ
	$BT(a,b,r,t) = f_X(x) = \dfrac{1}{\beta(r,t-r)(b-a)^{t-1}}$ $(x-a)^{r-1}(b-x)^{t-r-1}$; $a \leqslant x \leqslant b; r>0, t-r>0, a<b$	ไม่ให้ประโยชน์	$a + \dfrac{r}{t}(b-a)$	$(b-a)^2 \dfrac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$	กรณีทั่วไป
4. ยูนิฟอร์ม (Contineous Uniform)	$f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$; $a<x<b$	ไม่ให้ประโยชน์	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	
5. ปกติ (Normal)	$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(\dfrac{1}{2}(\dfrac{x-\mu}{\sigma})^2)$;	$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 \cdot 2}$	μ	μ^2	

ชื่อ	ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น	mgf	ค่าคาดหมาย	ความแปรปรวน	หมายเหตุ
6. ไคกำลังสอง (χ^2)	$f_X(x) = \dfrac{(\frac{1}{2})^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1}e^{-x/2}$; $x \geqslant 0$	$M_X(t) = (\dfrac{1}{1-2t})^{n/2}$	n	2n	
7. ที (t)	$f_X(x) = \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} (1+x^2/n)^{-n+1/2}$; $-\infty < x < \infty$	ไม่ให้ประโยชน์	0	$\dfrac{2}{n-2}$	
8. เอฟ (F)	$f_X(x) = \dfrac{\Gamma((m+n)/2)(m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \cdot (\dfrac{1}{1+(m/n)x})^{(m+n)/2} x^{m/2-1}$	ไม่ให้ประโยชน์	$\dfrac{n}{n-2}$	$\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$	