ตัวอย่าง 6.5 ฝ่ายผลิตกล่าวว่าค่าเฉลี่ยเส้นผ่าศูนย์กลางภายในของท่ออลูมิเนียมมีขนาดตรงตามมาตรฐานที่กำหนดคือ 100 มม.

เพื่อทดสอบความเป็นจริงดังกล่าวฝ่ายควบคุมคุณภาพทำการสุ่มตัวอย่างท่อมา 10 ท่อ แล้ววัดเส้นผ่าศูนย์กลางปรากฏข้อมูลดังนี้

100.36	100.31	99.99	100.11	100.64
100.85	99.42	99.91	99.35	100.51

ก. ถ้าท่านเป็นเจ้าหน้าที่ฝ่ายควบคุมคุณภาพท่านจะตัดสินใจอย่างไร จะเชื่อได้หรือไม่ว่าฝ่ายผลิตสามารถควบคุมการผลิตให้อยู่ในลักษณะที่ควบคุมได้ ให้ใช้ $\alpha = .05$

ข. จงหาความเสี่ยงประเภทที่ 2 ถ้าตามความเป็นจริงแล้ว เส้นผ่าศูนย์กลางเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 100.05 มม.

วิธีทำ

$H_0 : \mu = 100$ vs $H_1 : \mu \neq 100$

จากข้อมูลพบว่า $s^2 = \frac{1}{9}\{\sum_{i}^{10} x_i^2 - \frac{(\sum^{10} x_i)^2}{10}\}$

$= \frac{1}{9}(100,292.39 - \frac{(1001.45)^2}{10})$

$= 0.242$

$s = 0.429$

$\bar{x} = 1001.45/10 = 100.145$

ก. ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $|\bar{x} - \mu_0| > t_{n-1,1-\alpha/2}s/\sqrt{n}$

$|\bar{x} - \mu_0| = |100.145 - 100| = 0.145$

$t_{9,0.975} = 2.262$ ดังนั้น $t_{9,0.975}s/\sqrt{n} = \frac{(2.262)(0.429)}{\sqrt{10}} = 0.306$

จะพบว่า $|\bar{x} - \mu_0| = 0.145$ มิได้มากกว่า $t_{9,0.975}s/\sqrt{n}$

ดังนั้น จึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ และเชื่อว่าฝ่ายผลิตสามารถควบคุมการผลิตท่ออลูมิเนียมให้อยู่ในระดับเส้นผ่าศูนย์กลางภายในถัวเฉลี่ยเท่ากับ 100 มม.

ข. $\beta(100.05) = ?$

จากภาพ 6.6 เลือกโค้งที่ $n = 10$

$$d = \left|\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{\mu_0 - \mu_1}{\hat{\sigma}_0}\right| = \left|\frac{100 - 100.05}{0.429}\right| = 0.12$$

ดังนั้น $\beta(100.05) \simeq 0.95$

ข. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$

โดยอาศัยเทคนิคเดียวกันกับข้อ ก. เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก

เมื่อ $$(\bar{x} - \mu_0) \leqslant t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} \qquad \text{..........(1)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\bar{x} \leqslant \mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} \qquad \text{..........(2)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leqslant t_{n-1,\alpha} \qquad \text{..........(3)}$$

สำหรับการแสดงวิธีพิสูจน์โดยละเอียดจะขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ค. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$

โดยอาศัยเทคนิคเช่นเดียวกับข้อ ก. เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$(\bar{x} - \mu_0) \geqslant t_{n-1,1-\alpha/2} s/\sqrt{n} \qquad \text{..........(1)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geqslant t_{n-1,1-\alpha/2} \qquad \text{..........(2)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

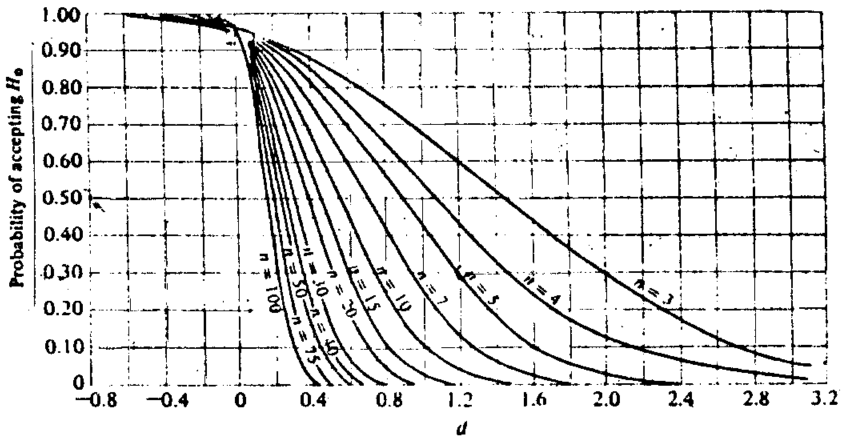
$$\bar{x} \geqslant \mu_0 + t_{n-1,1-\alpha/2} s/\sqrt{n} \qquad \text{..........(3)}$$

การพิสูจน์ความจริงข้างต้นขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด สำหรับการคำนวณหาค่า β ยังคงใช้ตาราง Noncentral t เช่นเดียวกับข้อ ก. โดยที่

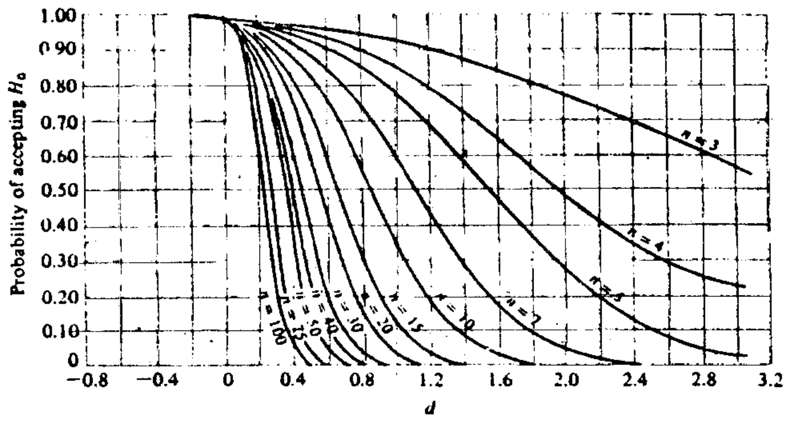
$$\beta(\mu_1) \quad = \quad \Pr\{(Z + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}})/\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}} < t_{n-1,1-\alpha}\}$$

โดยแปลงค่า μ_1 ไปเรื่อย ๆ ในลักษณะที่ $\mu_1 > \mu_0$

การคำนวณหาค่า β และ power สามารถใช้โค้ง OC ในภาพ 6.7 และ 6.8 ต่อไปนี้ ทั้งนี้ให้ใช้ $d = \dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\hat{\sigma}_0}$ สำหรับกรณีหางซ้ายและ $d = \dfrac{\mu_1 - \mu_0}{\hat{\sigma}_0}$ สำหรับกรณีหางขวา



ภาพ 6.7 OC curves for different values of n for the one-side t thest for a level of significance α = .05.



ภาพ 6.8 OC curves for different values of n for the one-sided t test for a level of significance α = .01.

ตัวอย่าง 6.6 เป็นที่ทราบกันดีว่า โลหะหล่อผสมสังกะสีมีจุดหลอมเหลวที่ 717°F เพื่อตรวจสอบความจริงข้อนี้ วิศวกรทำการสุ่มตัวอย่างโลหะผสมมา 9 ชิ้นแล้วบันทึก จุดหลอมเหลว ปรากฏข้อมูลดังนี้

708 716 720 723 712 726 703 707

จงทดสอบว่าข้อมูลเหล่านี้ยืนยันความเป็นจริงข้างต้นหรือไม่ ให้ใช้ $\alpha = 0.01$

วิธีทำ $H_0 : \mu\ 717$ vs $H_1 : \mu < 717$

จากข้อมูลพบว่า

$$s^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_i^9 x_i^2 - \frac{(\sum^9 x_i)^2}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(4{,}588{,}648 - \frac{(6246)^2}{9}\right)$$

$$= \mathbf{31740.5}$$

$$s = \mathbf{178.16}$$

$$\bar{x} = 6246/9 = \mathbf{694}$$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} \leqslant \mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n}$

$$\mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} = 717 - \frac{(2.986)(178.16)}{\sqrt{9}} = 545.02$$

จะเห็นได้ว่า $\bar{x} > \mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} = 545.02$ ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าจุดหลอมเหลวของโลหะหล่อผสมสังกะสีมีจุดหลอมเหลวถัวเฉลี่ยที่ 717°F

ตัวอย่าง 6.7 บริษัท ก. กำลังพิจารณาจะสั่งเครื่องจักรชนิดใหม่มาใช้แทนเครื่องรุ่นเก่าซึ่งผลิตสินค้าได้เฉลี่ยเพียง 22.5 หน่วยต่อชั่วโมง โดยตั้งข้อกำหนดว่าเครื่องรุ่นใหม่จะต้องผลิตสินค้าได้เฉลี่ยเกินกว่า 22.5 หน่วยต่อ 1 ชั่วโมง

นำเครื่องชนิดใหม่ 16 เครื่องมาทดลองการผลิต โดยทำการทดลองผลิต 1 ชั่วโมง ปรากฏว่าเครื่องรุ่นใหม่ผลิตได้เฉลี่ย 22.6 หน่วยต่อชั่วโมง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.2 หน่วย

ก. ผลการทดลองพอจะยืนยันให้บริษัทตัดสินใจเลือกใช้เครื่องรุ่นใหม่ได้หรือไม่ให้ใช้ $\alpha = 0.05$

ข. ถ้าเครื่องชนิดใหม่ผลิตได้จริงโดยถัวเฉลี่ย 23 หน่วย ต่อ 1 ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่จะตัดสินใจไม่เลือกใช้เครื่องรุ่นนี้

วิธีทำ $H_0 : \mu = 22.5$ vs $H_1 : \mu > 22.5$

ก. ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} > \mu_0 + t_{n-1,1-\alpha/2} s/\sqrt{n}$

จากโจทย์ $n = 16$, $s = 1.2$, $\bar{x} = 22.6$ และพบว่า

$$\mu_0 + t_{n-1,1-\alpha/2}s/\sqrt{n} = 22.5 + t_{15,.95}\, 1.2/\sqrt{16}$$
$$= 22.5 + \frac{(1.753)(1.2)}{4} = 23.03$$

จะเห็นว่า $\bar{x} < \mu_0 + t_{n-1,1-\alpha/2}s/\sqrt{n}$ เราจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้และเชื่อว่าเครื่องรุ่นใหม่มิได้มีกำลังในการผลิตสูงกว่าเครื่องรุ่นเก่า

ข. ความน่าจะเป็นที่จะไม่เลือกใช้เครื่องจักรรุ่นใหม่ทั้ง ๆ ที่เครื่องรุ่นนี้สามารถผลิตได้เฉลี่ยถึง 23 หน่วยต่อ 1 ชั่วโมง

$$= Pr\{\text{Reject } H_0|H_1\}$$
$$= 1 - Pr\{\text{Accept } H_0|H_1\}$$
$$= 1 \quad \beta(23)$$

จากภาพ 6.8 เลือกโค้ง OC ที่ $n = 15$ และใช้ค่า $d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\hat{\sigma}_0} = \frac{23 - 22.5}{1.2} = 0.42$

จะได้ $\beta(23) \simeq 0.50$ ดังนั้น $1 - \beta(23) = 1 - 0.50 = 0.50$

ดังนั้น ความเสี่ยงที่จะตัดสินใจไม่เลือกใช้เครื่องจักรรุ่นใหม่ทั้ง ๆ ที่เครื่องรุ่นนี้มีกำลังผลิตถัวเฉลี่ยถึง 23 หน่วยต่อ 1 ชั่วโมงเท่ากับ 50%

6.1.2 การทดสอบเกี่ยวกับความแปรปรวน

กรณีที่ 1 เมื่อถือว่าทราบค่า μ

ก. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(I) การพัฒนาตัวทดสอบ

สุ่มตัวอย่าง $(X_1, x_2, \ldots X_n)$ มาจากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu_0, \sigma^2)$ ดังนั้น $\omega = \{\mu_0, \sigma_0^2\}$ และ $\Omega = \{\mu_0, \sigma^2; \sigma^2 > 0\}$

$$L\hat{}_{\omega} = L_{\hat{\omega}} = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}$$

$$L_{\Omega} = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln\Omega = 0 => -\frac{n}{\sigma} - 0 + \frac{1}{\sigma^2}\sum^{n}(x_i-\mu_0)^2 = 0$$

$$\therefore \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

ดังนั้น $$L_{\hat{\Omega}} = \left(\frac{n}{2n\,\Sigma(x_i-\mu_0)^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}$$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$A = \frac{L\hat{}_{\omega}}{L_{\hat{\Omega}}} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}}{\left\{\frac{n}{2n\,\Sigma(x_i-\mu_0)^2}\right\}^{n/2} e^{-n/2}} \leqslant k$$

=> $$\lambda = \left(\frac{\sum_{i}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{n}{2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\} \leqslant k$$

กำหนดให้ $$U = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

=> ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\lambda = U^{n/2}.e^{n/2} - U/2 \leqslant k$

จะสังเกตเห็นได้ว่า λ เป็นฟังก์ชั่นของตัวสถิติ U และเมื่อพิจารณาลิมิตของ λ จะพบว่า เมื่อ $U \to 0$ แล้ว $\lambda \to 0$ ขณะเดียวกัน เมื่อ $U \to \infty$ แล้ว $\lambda \to 0$ (อาศัยกฎ L'Hospital Rule) แสดงว่า $\lambda < k$ เมื่อ $k < 1$ ตรงตามนิยามของ MLRT ซึ่งชี้ให้เห็นว่าเมื่อ U มีค่าปรากฏอยู่ในระหว่างค่าคงที่ 2 ค่าคือค่ามาก (∞) และค่าน้อย (0) แล้ว λ จะยังคงสอดคล้องกับนิยามของ MLRT

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $k'' < U < k'$ หรือยอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อ $k' < U < k''$ [1]

---

[1] ขอให้พิจารณาเปรียบเทียบกับ Real Line ดังภาพ 

โดยปกติแล้ว ถ้าเรายอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อ $k' < U < K''$ แสดงว่าเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $k' > U > k''$ แต่รูปของอสมการนี้ไม่เป็นรูปที่สากลเราจึงกลับอสมการเสียใหม่เป็น $k'' < U < k'$

นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $k'' \leqslant \frac{\sum_{i}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leqslant k'$

จาก $a = \Pr\{\text{Reject } H_0|H_0\}$

$$=> \quad a = \Pr\{k'' \leqslant \frac{\sum_{i}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{0:} \leqslant k' \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\}$$

$$= \Pr\{k'' \leqslant \sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \leqslant k'\}$$

แต่ $\sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \sim \chi^2_{(n)}$

เพื่อความสะดวกเราควรแบ่งพื้นที่ใต้โค้งในเขตวิกฤติออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน

$$=> \quad \Pr\{k'' \leqslant \sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \leqslant k'\} = \alpha = \Pr\{\chi^2_{n,1-\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n,\alpha/2}\}$$ [1]

$$=> \quad k' = \chi^2_{n,\alpha/2} \text{ และ } k'' = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$$

ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐาน $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\chi^2_{n,1-\alpha/2} \leqslant \sum_{i}^{n}(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \leqslant \chi^2_{n,\alpha/2} \qquad \text{..........(1)}$$

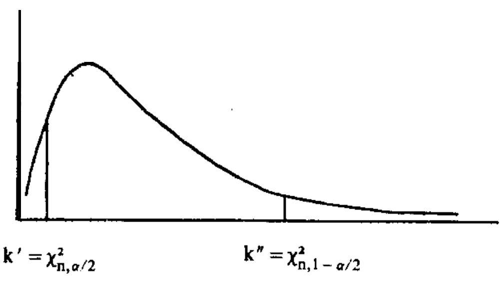
และยอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\chi^2_{n,\alpha/2} < \sum_{i}^{n}(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 < \chi^2_{n,1-\alpha/2}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $\sum_{i}^{n}(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \geqslant \chi^2_{n,1-\alpha/2}$ หรือเมื่อ $\sum_{i}^{n}(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \leqslant \chi^2_{n,\alpha/2}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

---

[1] พิจารณาเปรียบเทียบจากภาพ



(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

$$\beta = \Pr\{\text{Accept } H_0 | H_1\}$$

$$\beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_{n,\alpha/2} \leqslant \sum_i^n (\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \leqslant \chi^2_{n,1-\alpha/2} | \sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2\}$$

$$= \Pr\{\sigma_0^2 \chi^2_{n,\alpha/2} \leqslant \sum_i^n (X_i - \mu_0)^2 \leqslant \sigma_0^2 \chi^2_{n,1-\alpha/2} | \sigma_1^2\}$$

$$= \Pr\{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,\alpha/2} \leqslant \sum_i^n (\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_1})^2 \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha/2}\}$$

$$= \Pr\{\chi^2_n \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha/2}\} - \Pr\{\chi^2_n \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,\alpha/2}\}$$

แต่ $\Pr\{\chi^2_n \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,\alpha/2}\}$ มีค่าน้อยมากเพราะ $\chi^2_{n,\alpha/2}$ มีค่าใกล้ 0 หรือมีค่าต่ำ เราจึงประมาณค่า $\beta(\sigma_1^2)$ ได้ดังนี้

$$\beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_n \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha/2}\}$$

เมื่อเปลี่ยนค่า σ_1^2 ไปคราวละค่าในลักษณะที่ $\sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$ แล้วเราย่อมคำนวณหา $\beta(\sigma_1^2)$ ได้ตามต้องการโดยอาศัยตาราง χ^2

3) การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

จาก $$\beta(\sigma_1^2) \simeq \Pr\{\chi^2_n \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha/2}\}$$

$$\Rightarrow \Pr\{\chi^2_n \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha/2}\} \simeq \beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_n \leqslant \chi^2_{n,\beta}\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha/2} \simeq \chi^2_{n,\beta}$$

นั่นคือขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{n,\beta}}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}} \simeq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

ตัวอย่าง 6.8 สุ่มตัวอย่างมา 10 หน่วยจากกลุ่มประชากร $N(3.5, \sigma^2)$ ปรากฏผลดังนี้คือ

$$\sum_{i}^{10} x_i = 30 \quad , \quad \sum_{i}^{10} x_i^2 = 117$$

ก. จงทดสอบสมมุติฐานต่อไปนี้ ณ ระดับนัยสำคัญ 5%

$H_0 : \sigma^2 = 2.25$ vs. $H_1 : \sigma^2 \neq 2.25$

ข. ควรสุ่มตัวอย่างมากี่หน่วยจึงจะมีผลให้ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\sigma_1 = 2\sigma_0$ มีค่าสูงกว่า 95%

วิธีทำ

ก. $H_0 : \sigma^2 = 2.25$ vs. $H_1 : \sigma \neq 2.25$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\chi^2_{n,1-\alpha/2} \leqslant \sum_{i}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \leqslant \chi^2_{n,\alpha/2}$$

$$\sum_{i}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \left(\sum_{i}^{n} x_i^2 - 2\mu_0 \sum_{i}^{n} x_i + n\mu_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2.25} (117 - 2(3.5)(30) + 10(3.5)^2)$$

$$= 13.11$$

$$\chi^2_{10,0.025} = 3.247 \; , \; \chi^2_{10,0.975} = 20.48$$

จะเห็นว่า $\chi^2_c = 13.11$ มิได้ตกอยู่ในเขตวิกฤติ ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และเชื่อว่า $\sigma^2 = 2.25$

ข. Pr{ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก$|H_1 : \sigma = \sigma_1 = 2\sigma_0$} > 0.95

=> $1 -$ Pr{ยอมรับสมมุติฐานหลัก$|H_1 : \sigma = \sigma_1 = 2\sigma_0$} > 0.95

=> $=$ Pr{ยอมรับสมมุติฐานหลัก$|\sigma = \sigma_1 = 2\sigma_0$} $\leqslant 0.05$

ขนาดตัวอย่างอุดมะที่ควบคุมให้ $\alpha = 0.05$ และ $\beta = 0.05$ คือค่า n ที่คำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$\frac{\chi^2_{n,\beta}}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}} \simeq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

$\because \quad \alpha = 0.05,\ \beta = 0.05,\ \sigma_1 = 2\sigma_0$

$$=> \qquad \frac{\chi^2_{n,0.05}}{\chi^2_{n,0.975}} \cong \frac{\sigma_0^2}{4\sigma_0^2} = 0.25$$

จากตาราง χ^2 เลือกสดมภ์ที่ตรงกับ $p = 0.05$ และ $p = 0.975$ แล้วเปรียบเทียบค่า χ^2 จากสดมภ์ทั้งสองทีละคู่โดยนำค่า χ^2 จากสดมภ์ $p = 0.05$ ตั้งหารด้วยค่า χ^2 จากสดมภ์ $p = 0.975$ ไล่ลงมาตามลำดับจนกว่าจะพบว่า ปรากฏผลหารเท่ากับ 0.25

จากสดมภ์ทั้งสองดังกล่าวจะพบว่า เมื่อ $n = 14$ แล้ว

$$\chi^2_{14,0.05}/\chi^2_{14,0.975} = 6.571/26.12 = 0.251$$

นั่นคือ ขนาดตัวอย่างอุตมะคือ $n = 14$

ข. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$

1) การพัฒนาตัวทดสอบ

จากกลุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร $N(\mu_0, \sigma^2)$ ดังนั้น โดยอาศัย NPL เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\frac{L_0}{L_1} \leqslant k$ นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2\}}{\left(\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2\}} \leqslant k$$

$$= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n \exp\{\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right)\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2\} \leqslant k$$

$$=> \qquad n \ln \sigma_1 - n \ln \sigma_0 + \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right)\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2 \leqslant \ln k$$

$$\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right)\sum^n (x_i - \mu_0)^2 \leqslant \ln k - n \ln \sigma_1 + n \ln \sigma_0$$

แต่ $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ ตามสมมุติฐานรอง ดังนั้น $\frac{1}{2\sigma_1^2} < \frac{1}{2\sigma_0^2}$ และ $(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2})$ มีค่าเป็นปริมาณที่ติดลบ

$$=> \quad \sum^{n}(x_i - \mu_0)^2 > \frac{\ln k - n\ln\sigma_1 + n\ln\sigma_0}{(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2})} = k'$$

ดังนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\sum_{i}^{n}(x_i - \mu_0)^2 > k'$$

จากสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 1 คือ

$$\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0|H_1\}$$

$$=> \quad = \Pr\{\sum_{i}^{n}(X_i - \mu_0)^2 > k' | \sigma^2 = \sigma_0^2\}$$

$$= \Pr\{\sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 > \frac{k'}{\sigma_0^2}\}$$

และเนื่องจาก $\sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \sim \chi_n^2$

ดังนั้น

$$\Pr\{\sum_{i}^{n}(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 > \frac{k'}{\sigma_0^2}\} = \alpha = \Pr\{\chi^2 > \chi^2_{n,1-\alpha}\}$$

$$=> \quad k' = \sigma_0^2\chi^2_{n,1-\alpha}$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_{i}^{n}(x_i - \mu_0)^2 > \sigma_0^2\chi^2_{n,1-\alpha} \quad \text{..........(1)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_{i}^{n}(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 > \chi^2_{n,1-\alpha} \quad \text{..........(2)}$$

2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

$$\beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\sum_i^n (X_i - \mu_0)^2 \leqslant \sigma_0^2 \chi^2_{n,1-\alpha} | \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2\}$$

$$= \Pr\{\sum_i^n (\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_1})^2 \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha}\}$$

$$= \Pr\{\chi_n^2 \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha}\}$$

3) การหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

จากผลในข้อ ข.

$$=> \Pr\{\sum_i^n (\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_1})^2 \leqslant \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}.\chi^2_{n,1-\alpha}\} = \beta(\mu_1) = \Pr\{\chi^2 \leqslant \chi^2_{n,\beta}\}$$

ดังนั้น

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n,1-\alpha} = \chi^2_{n,\beta}$$

หรือ

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} = \frac{\chi^2_{n,\beta}}{\chi^2_{n,1-\alpha}}$$

การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{n,\beta}}{\chi^2_{n,1-\alpha}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

ค. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$

โดยอาศัยเทคนิคการพัฒนาตัวทดสอบทำนองเดียวกับข้อ ข. เราสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

1) ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2 \leqslant \sigma_0^2 \chi^2_{n,\alpha} \qquad \text{..........(1)}$$

หรือปฏิเสธสมมติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_i^n (\frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0})^2 \leqslant \chi^2_{n,\alpha} \qquad \text{..........(2)}$$

2) $\beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi_n^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi_{n,\alpha}^2\}$

3) ขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณได้โดยอาศัยสมการ

$$\frac{\chi_{n,1-\beta}^2}{\chi_{n,\alpha}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

กรณีที่ 2 เมื่อถือว่าไม่ทราบค่า μ

ก. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

1) การพัฒนาตัวทดสอบ

จากกลุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร $N(\mu, \sigma^2)$ และพิจารณาสมมุติฐานจะเห็นว่าสมมุติฐานรองเป็น Composite Hypothesis ซึ่งการพัฒนา test ต้องอาศัย MLRT ดังนั้น

$$\omega = \{\mu, \sigma_0^2; -\infty < \mu < \infty\}$$

$$\Omega = \{\mu, \sigma^2; -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

ดังนั้น

$$L_{\omega} = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$L_\Omega = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L_{\omega} = 0 \Rightarrow - o - o + \frac{1}{\sigma^2}\sum^n (x_i - \mu)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{\mu} = x$$

ดังนั้น $L_{\hat{\omega}} = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2\right\}$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L_\Omega = 0 \Rightarrow 0 - 0 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

ขณะเดียวกัน $\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L_{\Omega} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\sigma} - 0 + \frac{1}{\sigma^3}\sum (x_i-\mu)^2 = 0$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i-\mu)^2$$

เมื่อแทนค่า μ ด้วย $\hat{\mu} = \bar{x}$ ลงใน L_{Ω} และ σ^2

ดังนั้น $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ดังนั้น $$L_{\hat{\Omega}} = \left(\frac{n}{2\pi\,\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}$$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\lambda = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}}{\left(\frac{n}{2\pi\,\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}} \leqslant k$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2}\exp\left\{\frac{n}{2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\} \leqslant k$$

$$= \left(\frac{(n-1)s^2}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2}\exp\left\{\frac{n}{2} - \frac{(n-1)s^2}{2\sigma_0^2}\right\} \leqslant k$$

โดยอาศัยแนวคิดทำนองเดียวกับ ตอน ก. ในกรณีที่ 1 เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$k'' \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leqslant k$$

หรือยอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อ $k' < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < k$

จากสมการความเสี่ยงประเภทที่ 1 คือ $\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 \mid H_0\}$

$$\Rightarrow \alpha = \Pr\left\{k'' \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leqslant k' \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right\} = \Pr\left\{k'' \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leqslant k'\right\}$$

และเนื่องจากตัวแปรสุ่ม $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

$$=> \Pr\{k'' \; 6 \; \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leqslant k'\} = \alpha = \Pr\{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \leqslant \chi^2_{n-1} \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha/2}\}$$

$$=> k'' = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \quad , \quad k' = \chi^2_{n-1,\alpha/2}$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha/2}$$ [1]

และยอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

จาก $\beta = \Pr\{\text{Accept } H_0 | H_1\}$

$$=> \quad \beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha/2} \mid \sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2\}$$

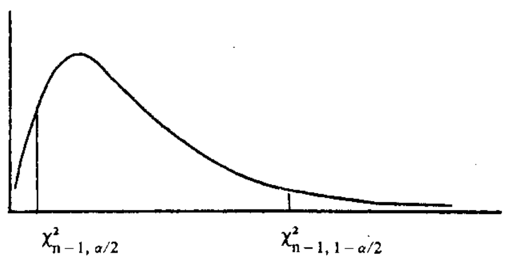
$$= \Pr\{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leqslant \chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

$$= \Pr\{\chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\} - \Pr\{\chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,\alpha/2}\}$$

หรือคำนวณหาค่า $\beta(\sigma_1^2)$ ได้โดยประมาณ ทั้งนี้เพราะถือว่า $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ มีค่าค่อนข้างต่ำ

$$=> \beta(\sigma_1^2) \simeq \Pr\{\chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

[1] เปรียบเทียบกับภาพต่อไปนี้



(3) การกำหนดขนาดตัวอย่างอุตมะ

=> จาก $\beta(\sigma_1^2) \simeq \Pr\{\chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\}$

=> $\Pr\{\chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\} \simeq \beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,\beta}\}$

=> $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \simeq \chi^2_{n-1,\beta}$

นั่นคือ เราสามารถคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{n-1,\beta}}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \simeq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

ตัวอย่าง 6.9 บริษัทผลิตตัวต้านทานกล่าวว่าตัวต้านทานชนิด 20 Ω ของบริษัทมีคุณภาพละม้ายกันมาก กล่าวคือมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเพียง 0.5 Ω เท่านั้น

จากการสุ่มตัวอย่างตัวต้านทานชนิด 20 Ω มา 20 ตัว แล้ววัดค่าความต้านทาน ปรากฏว่าพบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.49 Ω

ก. จงทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \sigma = 0.5$ vs $H_1 : \sigma \neq 0.5$ ณ ระดับนัยสำคัญ 1%

ข. ท่านควรจะสุ่มตัวอย่างตัวต้านทานมาตรวจสอบกี่ตัวจึงจะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธคำโฆษณาของบริษัทผู้ผลิตทั้ง ๆ ที่ $\sigma_1 = 1.5\,\sigma_0$ เป็นไปได้อย่างน้อย 80%

ค. จงคำนวณหา $\beta\,(\sigma_1 = 0.55)$

วิธีทำ $H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0.5$ vs $H_1 : \sigma = \sigma_1 \neq 0.5$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha/2}$$

จากโจทย์ $s^2 = (0.49)' = 0.2401,\ \sigma_0^2 = (0.5)^2 = 0.25,\ n = 20$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19)(0.2401)}{0.25} = 18\ \ 25$$

$$\chi^2_{19,0.005} = 6.844,\ \chi^2_{19,0.995} = 38.58$$

จะเห็นว่า $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ มิได้ตกอยู่ในเขตวิกฤติ ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และเชื่อว่าคุณภาพของตัวต้านทานชนิด 20 Ω ของบริษัทมีคุณภาพละม้ายคล้ายคลึงกัน (Homogeneous)

ข. Pr {ปฏิเสธ $H_0 \mid H_1$} $\geqslant 0.80$

=> 1 – Pr {ยอมรับ $H_0 \mid H_1$} $\geqslant 0.80$

$\beta(\sigma_1 = 1.5\,\sigma_0) = \Pr\{$ยอมรับ $H_0 \mid H_1 : \sigma_1 = 1.5\,\sigma_0\} \leqslant 1 - 0.80 = 0.20$

ขนาดตัวอย่างอุตมะคำนวณได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{n-1,\beta}}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \simeq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

$$=> \quad \frac{\chi^2_{n-1,.20}}{\chi^2_{n-1,0.995}} \simeq \frac{\sigma_0^2}{(1.5\,\sigma_0)^2} = \frac{0.25}{(2.22)\,(0.25)} = 0.4444$$

จากตาราง χ^2 ดูที่สดมภ์ p = .25 [1] และ p = 0.995 พบว่า เมื่อ df = 28 จะได้ $\chi^2_{28,0.25} = 22.66$ และ $\chi^2_{28,0.995} = 50.99$ ซึ่งมีผลให้

$$\frac{\chi^2_{28,0.25}}{\chi^2_{28,0.995}} = \frac{22.66}{50.99} = 0.4444$$

นั่นคือ n – 1 = 28 หรือ n = 29 คือขนาดตัวอย่างอุตมะตามต้องการ

ค. จาก $\beta(\sigma_1^2) \simeq \Pr\{\chi^2_{n-1} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\}$

$$=> \quad \beta(\sigma_1 = 0.55) \simeq \Pr\{\chi^2_{19} < \frac{(0.25)\,(50.99)}{0.3025}\}$$

$$\simeq \Pr\{\chi^2_{19} < 42.14) = 0.999$$

ข. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$

---

[1] ในตารางไม่มีสดมภ์ p = 0.20 จึงใช้สดมภ์ p = 0.25 แทน ค่า n อาจคลาดเคลื่อนไปบ้าง แต่อย่างไรก็ตาม ค่า n ที่ได้นี้เป็นค่าประมาณอยู่แล้ว การใช้ p = 0.25 แทน p = 0.20 จึงมิได้ส่งผลเสียหายได้มากนัก

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

จากกลุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร $N(\mu, \sigma^2)$ และเนื่องจาก μ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ดังนั้น จึงต้องพัฒนา test โดยอาศัย MLRT โดยที่

$$\omega = \{\mu, \sigma_0^2 ; -\infty < \mu < \infty\}$$

และ $$\Omega = \{\mu, \sigma_0^2 ; -\infty < \mu < \infty\}$$

=> $$L_\omega = \left(\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_i^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

=> $$L_\Omega = \left(\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{w\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_i^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$\frac{a}{\partial \mu} \ln L_\omega = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L_\Omega = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{x}$$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $= \frac{L_{\hat{\omega}}}{L_{\hat{\Omega}}} \leq k$

=> $$\lambda = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n \exp\left\{\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} \quad \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) \sum_i^n (x_i - \overline{x})^2\right\} \leq k$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\sum_i^n (x_i - \overline{x})^2 \leq \frac{\text{Ihk} - n\ln\sigma_1 + n\ln\sigma_0}{\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right)} = k'$$

จาก $\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 \mid H_0\}$

=> $\alpha = \Pr\{\sum_i^n (X_i - \overline{X})^2 \leq k' \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\}$

=> $\alpha = \Pr\{(n-1)S^2 \leq k' \quad \sigma^2 = \sigma_0^2\}$

$$a = \Pr\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{k'}{\sigma_0^2}\right\}$$

ดังนั้น $\Pr\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leqslant \frac{k'}{\sigma_0^2}\} = \alpha = \Pr\{\chi^2_{(n-1)} \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha}\}$

$$=> \quad k' = \sigma_0^2\chi^2_{n-1,\alpha}$$

นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_{i}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \leqslant \sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha} \qquad \text{.......... (1)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\chi^2_c = (\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_0})^2 \leqslant \chi^2_{n-1,\alpha} \qquad \text{.......... (2)}$$

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

$$\beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha} \mid \sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2\}$$

$$= \Pr\{\sum_{i}^{n} (\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_1})^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1,\alpha}\}$$

$$= \Pr\{\chi^2_{n-1} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1,\alpha}\}$$

(3) การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

จาก $\quad \beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_{n-1,\alpha} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1,\alpha}\}$

$$=> \quad \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{n-1,1-\beta}$$

นั่นคือ ขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{n-1,1-\beta}}{\chi^2_{n-1,\alpha}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

ฅ. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$

โดยอาศัยเทคนิคทำนองเดียวกับข้อ ข. จะพบว่า

1) ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \geq \sigma_0^2 \chi^2_{n-1,1-\alpha} \qquad \text{..........(1)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\chi_c^2 = \sum_{i}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_0}\right)^2 \geq \chi^2_{n-1,1-\alpha} \qquad \text{..........(2)}$$

2) การคำสวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

$$\beta(\sigma_1^2) = \Pr\{\chi^2_{n-1)} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{n-1,1-\alpha}\}$$

3) การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

ขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{n-1,\beta}}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

ตัวอย่าง 6.10 ในการจัดระเบียบสำนักงาน นักวิจัยการดำเนินงานพิจารณาเห็นว่าควรจะได้จัดโต๊ะทำงานเจ้าหน้าที่เสียใหม่เพื่อให้การเดินหนังสือราชการผ่านเป็นสายไม่ขาดตอนโดยที่หนังสือผ่านจากโต๊ะหนึ่งสู่อีกโต๊ะหนึ่งจนถึงหัวหน้างาน โดยเจ้าหน้าที่เสียเวลาผ่านหนังสือสะดวกรวดเร็วขึ้น

จากการทดลองจัดระเบียบใหม่และทดลองส่งหนังสือ 30 ฉบับ ปรากฏว่าใช้เวลาต่าง ๆ กันดังนี้

เวลาเดินหนังสือ (นาที)

11.97	11.94	12.09	12.04	11.90	12.25
12.15	11.89	12.15	12.11	11.86	12.16
12.08	12.16	12.14	12.25	12.40	12.19
12.31	12.25	12.47	12.15	12.23	12.31
12.24	12.04	11.98	12.34	12.07	12.30

ก. อยากทราบว่าการจัดสำนักงานแบบใหม่ควรนำมาปฏิบัติหรือไม่ ถ้าก่อนหน้านั้นใช้เวลาเดินหนังสือเฉลี่ย 12.50 นาที

ข. ถ้าก่อนหน้านี้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเวลาเดินหนังสือเท่ากับ 0.2 นาที การจัดสำนักงานวิธีใหม่จะลดความแปรปรวนของเวลาลงกว่าเดิมหรือไม่

ให้ใช้ระดับนัยสำคัญ 5%

วิธีทำ ก. $H_0 : \mu = 12.50$ vs $H_1 : \mu < 12.50$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} < \mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n}$

$$s^2 = \frac{1}{29}\left(\sum_{i}^{30} x_i^2 - \frac{(\sum^{30} x_i)^2}{30}\right) = \frac{1}{29}\left(4429.4028 - \frac{(364.5)^2}{30}\right)$$

$$s^2 = 0.25$$

$$s = .158$$

$$\bar{x} = 364.5/30 = 12.15$$

$$\mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} = 12.50 - \frac{(1.699)\ (.158)}{\sqrt{30}} = 12.45$$

จะเห็นได้ว่า $\bar{x} < \mu_0 + t_{n-1,\alpha} s/\sqrt{n} = 12.45$ ดังนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าการจัดสำนักงานแบบใหม่จะช่วยลดเวลาการเดินหนังสือราชการลง

ข. $H_0 : \sigma = 0.2$ vs $H_1 : \sigma = \sigma_1 < 0.2$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $(n-1)s^2 \leqslant \sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}$

$$(n-1)s^2 = 29\ (.025) = .725$$

$$\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha} = (.04)\ (11.71) = 0.4684$$

จะเห็นว่า $(n-1)s^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}$ หรือค่า $(n-1)s^2$ มิได้ตกอยู่ในเขตวิกฤต ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และเชื่อว่าความแปรปรวนในการเดินหนังสือแต่ละฉบับของแผนการจัดสำนักงานแบบใหม่มิได้ต่างไปจากเดิม

6.2 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของกลุ่มประชากรอื่น

6.2.1 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ λ ของกลุ่มประชากรพัวซอง

ก. $Ho : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

สุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, ..., X_n)$ จากกลุ่มประชากรพัวซองที่มีการแจกแจงดังนี้

$$f_X(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; \; x = 0, 1, ...$$

โดยที่ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนอุบัติการณ์พัวซองที่ปรากฏในช่วงเวลาที่ศึกษา [1] และ λ คืออัตราเฉลี่ยของการปรากฏอุบัติการณ์ (mean rate of occurence) ในช่วงเวลาย่อยหนึ่ง

ดังนั้น
$$L_0 = \prod_i^n f_X(x_i;\lambda_0) = \frac{e^{-\lambda_0}\lambda_0^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\lambda_0}\lambda_0^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda_0}\lambda_0^{x_n}}{x_n!}$$

$$= \frac{e^{-n\lambda_0}\lambda_0^{\sum^n x_i}}{\prod_i^n x_i!}$$

และ
$$L_1 = \prod_i^n f(x_i;\lambda_1) = \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{x_n}}{x_n!}$$

$$= \frac{e^{-n\lambda_1}\lambda_1^{\sum^n x_i}}{\prod_i^n x_i!}$$

โดยอาศัย NPL เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\frac{L_0}{L_1} \leqslant k$

นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

---

[1] ตัวแปรสุ่มพัวซองแสดงถึงจำนวนอุบัติการณ์ที่ปรากฏในช่วงเวลา ช่วงระยะทาง หน่วยความยาวของวัตถุ ปริมาตรของสาร จุดสังเกต ฯลฯ ขอให้นักศึกษาย้อนไปอ่านรายละเอียดเรื่องนี้ในบทที่ 4 ตอน 4.2.5

$$\frac{e^{-n\lambda_0}\lambda_0^{\sum_i^n x_i}}{\prod_i^n x_i!} \Big/ \frac{e^{-n\lambda_1}\lambda_1^{\sum_i^n x_i}}{\prod_i^n x_i!} \leqslant k$$

$$e^{n\lambda_1 - n\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\sum_i^n x_i} \leqslant k$$

$$=> n\lambda_1 - n\lambda_0 + (\ln\lambda_0 - \ln\lambda_1)\sum_i^n x_i \leqslant \ln k$$

$$(\ln\lambda_0 \; 1 \; \ln\lambda_1)\sum_i^n x_i \leqslant \ln k - n\lambda_1 + n\lambda_0$$

เนื่องจาก $\lambda_1 > \lambda_0$ ตามสมมุติฐานรอง ดังนั้น $(\ln\lambda_0 - \ln\lambda_1)$ จึงมีค่าเป็นปริมาณที่ติดลบ เมื่อนำ $(\ln\lambda_0 - \ln\lambda_1)$ หารอสมการโดยตลอดย่อมมีผลทำให้อสมการเปลี่ยนจาก $\leqslant$ เป็น $>$

=> ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\sum_i^n x_i > \dfrac{\ln k - n\lambda_1 + n\lambda_0}{(\ln\lambda_0 - \ln\lambda_1)} = k'$ [1]

จากสมการ Probability of Type I Error $\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 \mid H_1\}$

$$=> \alpha = \Pr\{\sum_i^n x_i > k' \mid \lambda = \lambda_0\}$$

เนื่องจากเมื่อ $X \sim$ Poisson (λ) ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_i^n X_i \sim$ Poisson ($n\lambda$) และเมื่อ $\lambda = \lambda_0$ ตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_i^n X_i \sim$ Poisson ($n\lambda_0$) [1]

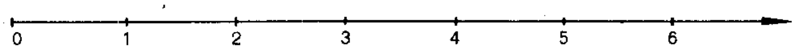
---

[1] $\sum_i^n x_i$ คือผลรวมของจำนวนครั้งของอุบัติการณ์ในช่วงเวลาที่ศึกษาที่ทำการสังเกต n ครั้ง ตัวอย่างเช่น ทำการบันทึกจำนวนจุลินทรีย์ในปริมาตร 1 ซีซี ทั้งสิ้น 5 ซีซี

ให้ X = จำนวนจุลินทรีย์ในน้ำปริมาตร 1 ซีซี ผลการบันทึกพบว่า $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 1$ ดังนั้น $\sum_i^5 x_i = 6$ คือผลร่วมของจำนวนจุลินทรีย์ในน้ำขนาดปริมาตร 1 ซีซี ทั้งสิ้น 5 หน่วย

[1] การแจกแจงพัวซองเป็นการแจกแจงแบบตัดตอน ค่าของตัวแปรสุ่มจึงมีค่าเป็นหน่วยที่แยกจากกัน ไม่มีค่าอื่น ๆ เชื่อมต่อระหว่าง 2 ค่าคู่ใด ๆ เหมือนในกรณีของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ดังนั้น ถ้าค่าของ X ปรากฏใน real line ดังนี้คือ



ดังนั้น $\Pr(X < 5)$ จึงเท่ากับ $\Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \ldots + \Pr(X = 4)$ หรือ $\Pr(X < 5) = \sum_{x=0}^{4} f_x(x;\lambda)$

ดังนั้น $Pr\{Y > k'\} = \alpha = \sum_{y=k'+1}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!}$ หรือ $1 - \sum_{y=0}^{k'} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!}$

ซึ่งสามารถคำนวณหาค่า k' ได้จากสมการ $\alpha = \sum_{y=k'+1}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!}$ ซึ่งอาจใช้ตาราง ตารางพัวซองสะสมหรือ Individual Poisson ก็ได้ ทั้งนี้ให้ใช้ค่าอัตราเฉลี่ยของ การปรากฏอุบัติการณ์เท่ากับ $n\lambda_0$

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

$$\beta(\lambda_1) = Pr\{Y < k' \mid \lambda = \lambda_1 > \lambda_0\}$$

โดยที่ k' คือค่าคงที่ที่คำนวณได้จากตอนที่ 1 และเพื่อมิให้สับสนกับ k' ในตอนเริ่มพัฒนา test ต่อไปนี้จะใช้เป็น k^* ในความหมายของค่า k' ที่คำนวณได้จากตอนที่ (1)

$$\beta(\lambda_1) = Pr\{Y < k^* \mid \lambda = \lambda_1 > \lambda_0\}$$

เมื่อ $\lambda = \lambda_1$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $y = \sum_{i}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบ Poisson $(n\lambda_1)$

ดังนั้น $\beta(\lambda_1) = \sum_{y=0}^{k-1} \frac{e^{-n\lambda_1}(n\lambda_1)^y}{y!}$

(3) การพัฒนา test โดยอาศัย CLT

ตัวทดสอบและค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 ในตอนที่ (1) และ (2) เป็นตัวทดสอบที่ให้ค่าที่ถูกต้อง (exact) แต่อาจจะทำให้ผู้ใช้สับสนได้บ้างโดยเฉพาะในกรณีที่นักศึกษาไม่คุ้นเคยกับการใช้ตารางสะสม ในกรณีเช่นนี้เราสามารถพัฒนาตัวทดสอบขึ้นมาใช้แทนกันได้โดยประมาณโดยอาศัย CLT ดังนี้ [1]

จาก $\alpha = Pr\{Y > k' \mid \lambda = \lambda_0\}$

เนื่องจาก $X \sim$ Poisson (λ) ดังนั้น $Y = \sum_{i}^{n} X_i \sim$ Poisson $(n\lambda)$ โดยมีค่าคาดหมายเท่ากับ $n\lambda$ และความแปรปรวนเท่ากับ $n\lambda$ และเมื่อ H_0 เป็นจริงหรือเมื่อ $\lambda = \lambda_0$

ดังนั้น $E(Y) = n\lambda_0$ และ $V(Y) = n\lambda_0$

---

[1] ถ้า $\lambda > 10$ เราสามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบ Poisson ได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติ เพราะ Bar Chart ของการแจกแจง Poisson มีลักษณะสมมาตรทำนองเดียวกับโค้งปกติ

โดยอาศัย CLT ดังนั้น

$$\alpha = \Pr\left\{ \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} > \frac{k' - n\lambda_0}{\sqrt{\cdot n\lambda_0}} \right\} = \Pr\left\{Z > \frac{k' - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\right\}$$

$$=> \Pr\left\{Z > \frac{k' - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\right\} = \alpha = \Pr\{Z > Z_{1-\alpha}\}$$

$=> k' = n\lambda_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\nu\lambda_0}$ นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$y = \sum_{i}^{n} x_i > n\lambda_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{n\lambda_0}$$

และ $$\beta(\lambda_1) = \Pr\{Y \leqslant n\lambda_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{n\lambda_0} \mid \lambda = \lambda_1 > \lambda_0\}$$

เมื่อ H_1 เป็นจริงหรือ $\lambda = \lambda_1$ ดังนั้น $E(Y) = V(Y) = n\lambda_1$

ดังนั้น $$\beta(\lambda_1) = \Pr\left\{ \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leqslant \frac{n\lambda_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{n\lambda_0} - n\lambda_1}{\sqrt{n\lambda_1}} \right\}$$

$$= \Pr\left\{Z \leqslant \frac{n\lambda_0 - n\lambda_1}{\sqrt{n\lambda_1}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\right\}$$

สำหรับขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณได้ดังนี้

จาก $$\beta(\lambda_1) = \Pr\left\{Z \leqslant \frac{\sqrt{n}(\lambda_0 - \lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\right\}$$

$$=> \frac{\sqrt{n}(\lambda_0 - \lambda_1)}{\sqrt{\lambda}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}} = Z_\beta$$

ดังนั้น $$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{\lambda_1}\left(Z_\beta - Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\right)}{(\lambda_0 - \lambda_1)}$$

$$=> \qquad n = \frac{(Z_{1-\beta}\sqrt{\lambda_1} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\lambda_0})^2}{(\lambda_0 - \lambda_1)^2}$$

ข. $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 < \lambda_0$

โดยอาศัยเทคนิคและวิธีการทำนองเดียวกันกับใน ข้อ ข. เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

(1) ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\sum_{i}^{n} x_i \leqslant k'$$

โดยที่ k' สามารถคำนวณหาได้จากสมการ

$$\alpha = \sum_{y=0}^{k'} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_1)^y}{y!} \; ; \; y = \sum_{i}^{n} x_i$$

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

ให้ k^* คือค่าของ k' ที่คำนวณได้จากตอนที่ (1)

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda_1) &= \Pr\{Y\ k^* \mid \lambda = \lambda_1 < \lambda_0\} \\
&= \sum_{y=k^*+1}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_1}(n\lambda_1)^y}{y!} \\
&= 1 - \sum_{y=0}^{k^*} \frac{e^{n\lambda_1}(n\lambda_1)^y}{y!}
\end{aligned}$$

(3) การพัฒนาตัวทดสอบโดยอาศัย CLT หรือการประมาณค่าวิกฤต k'

ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_{i}^{n} x_i \leqslant n\lambda_0 + Z_\alpha \sqrt{n\lambda_0}$$

และ

$$\beta(\lambda_1) = \Pr\{Z > \frac{n\lambda_0 - n\lambda_1}{\sqrt{n\lambda_1}} + Z_\alpha \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\}$$

และขนาดตัวอย่างอุตมะ $= \dfrac{(Z_{1-\beta}\sqrt{\lambda_1} - Z_\alpha\sqrt{\lambda_0})^2}{(\lambda_0 - \lambda_1)^2}$

สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ จะขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 6.10 ในช่วงเวลา 1 ปี ที่ผ่านมาผลการบันทึกจำนวนคนงานที่ขาดงานในแต่ละเดือนปรากฏดังนี้

3, 0, 1, 2, 0. 1, 4, 1, 0, 1, 2, 1

ก. อยากทราบว่าข้อมูลเหล่านี้สนับสนุนข้อสงสัยว่า "อัตราการขาดงานถัวเฉลี่ยเท่ากับ .75 คนต่อเดือน" หรือไม่

ข. จงคำนวณหาความเสี่ยงประเภทที่ 2 ถ้าอัตราถั่วเฉลี่ยของการขาดงานต่อเดือนเท่ากับ 1 คน

ให้ใช้ระดับนัยสำคัญ 5%

วิธีทำ

ก. $H_0 : \lambda = .75$ vs $H_1 : \lambda > .75$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $Y = \sum_{i}^{n} x_i > k$ เมื่อ k คำนวณได้จากสมการ

$$\alpha = \sum_{y=k+1}^{\infty} \frac{e^{n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!} = 1 - \sum_{y=0}^{k} \frac{e^{n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!}$$

$n = 12, y = 3 + 0 + 1 + \ldots + 2 + 1 = 16, n\lambda_0 = 12\,(.75) = 9, \alpha = .05$

ดังนั้น k สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\sum_{y=0}^{k} \frac{e^{-9}\,9^y}{y!} = .95$$

จากตาราง Cumulative Poisson พบว่า $\sum_{y=0}^{14} \frac{e^{-9}\,9^y}{y!} \simeq .95$

นั่นคือ $k = 14$

จากผลการบันทึกข้อมูลพบว่า $y = 16$ ซึ่งมีค่ามากกว่า $k = 14$ ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าอัตราเฉลี่ยของการขาดงานต่อเดือนมีค่าสูงกว่า 0.75 คน

ข.

$$\beta(\lambda = 1) = ?$$

$$\beta(\lambda_1) = \Pr\{ Y < 14 \mid \lambda = \lambda_1 = 1 \}$$

$$\Rightarrow \beta(1) = \sum_{y=0}^{13} \frac{e^{-n\lambda_1}(n\lambda_1)^y}{y!}$$

$$= \sum_{y=0}^{13} \frac{e^{-12}\,12^2}{y!}; \; n\lambda_1 = 12x1$$

$$= .682$$

ตัวอย่าง 6.11 นำเส้นลวดที่ใช้เป็นสื่อไฟฟ้าขนาดราว 1 ฟุต มา 6 ท่อน เพื่อตรวจหาจุดบกพร่องในการนำกระแส โดยทดลองผ่านกระแสแรงสูงผ่านเข้าไปในเส้นลวดดังกล่าว ผลการทดลองพบจุดบกพร่องในเส้นลวดทั้ง 6 ท่อน 2, 0, 1, 1, 5 และ 2 จุด ตามลำดับ และตามมาตรฐานผลิตภัณฑ์ของทางราชการ เส้นลวดชนิดนี้จะต้องมีจุดบกพร่องไม่เกินกว่า 120 จุด ต่อลวดยาว 100 ฟุต จงทดสอบ ณ ระดับนัยสำคัญ 5% ว่าลวดเหล่านี้มีคุณภาพตรงตามมาตรฐานผลิตภัณฑ์ของทางราชการหรือไม่

วิธีทำ $\lambda = 120/100 = 1.2$ จุด/ฟุต

ดังนั้น $H_0 : \lambda = 1.2$ vs $H_1 : \lambda < 1.2$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $y \leqslant k$ โดยที่ k คำนวณได้จากสมการ

$$= \sum_{y=0}^{k} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!}$$

$n = 6, \lambda_0 = 1.2, \alpha = .05$ ดังนั้น $n\lambda_0 = 6\,(1.2) = 7.2$

และจากตารางพัวซองพบว่า

$$\sum_{y=0}^{3} \frac{e^{-7.2}(7.2)^y}{y!} = 0.72$$[1]

แสดงว่า $k = 3$

จากข้อมูลพบว่า $y = 2 + 0 + 1 + 1 + 5 + 2 = 11$ ซึ่งมีค่าสูงกว่า $k = 3$ ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าลวดเหล่านี้สุ่มมาจากลวดที่ได้มาตรฐานตามมาตรฐานผลิตภัณฑ์ของทางราชการ

ตัวอย่าง 6.12 เป็นที่ปรากฏเป็นข่าวในหน้าหนังสือพิมพ์ถึงการปรับปรุงกฎและระเบียบการจราจรเสมอว่า กฎจราจรที่ประกาศใช้ใหม่เมื่อปีที่แล้วมีผลให้จำนวนอุบัติเหตุบนท้องถนนลดลง

จากการบันทึกข้อมูลในปีที่แล้วพบว่าจำนวนอุบัติเหตุบนท้องถนน 9 ราย ขณะที่จำนวนอุบัติเหตุถัวเฉลี่ยต่อปีในช่วงเวลาก่อนหน้านั้นเท่ากับ 15 ราย เมื่อเป็นดังนี้ท่านจะสรุปได้หรือไม่ว่ากฎหมายจราจรฉบับใหม่มีผลให้จำนวนอุบัติเหตุบนท้องถนนลดปริมาณลง

---

[1] ถือเอาค่าใกล้เคียง ทั้งนี้เพราะตัวแปรสุ่มแบบตัดตอนมักให้ค่าความน่าจะเป็นไม่พอดีกับระดับที่กำหนด ซึ่งในที่นี้คือ .05 ถ้าจะให้ค่าพอดีค่า k จะเป็นจุดทศนิยม เช่น ตามตัวอย่างถ้าจะให้ได้ $\alpha = .05$ พอดี จะต้องใช้ $k = 2.53$ ซึ่งคำนวณโดยวิธี interpolation จากตาราง

วิธีทำ ในช่วงเวลาก่อนประกาศใช้กฎหมายจราจรฉบับใหม่ปรากฏจำนวนอุบัติเหตุถัวเฉลี่ย ปีละ 15 ราย หรือเดือนละ $\frac{15}{12} = 1.25$ ราย ดังนั้นสมมติฐานที่สนใจ คือ

$H_0 : I = 1.25$ vs $H, : \lambda = \lambda < 1.25$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $y \leqslant k$ เมื่อ k คือค่าคงที่ที่คำนวณได้จากสมการ

$$a = \sum_{y=0}^{k} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^y}{y!}$$

$\alpha = .05, n = 12$ ดังนั้น $n\lambda_0 = 15$ โดยอาศัยตารางพัวซองพบว่า

$$\sum_{y=0}^{9} \frac{e^{-15}15^y}{y!} = .070$$

$\Rightarrow k = 9$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $y \leqslant 9$

จากข้อมูล $y = 9$

ดังนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และเชื่อว่ากฎหมายจราจรฉบับใหม่ช่วยให้จำนวนอุบัติเหตุลดลง

6.2.2 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ λ ของกลุ่มประชากรเอกโพเนนเชียล

ก. $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 < \lambda_0$

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

สุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ จากกลุ่มประชากรเอกโพเนนเชียลที่มีการแจกแจงดังนี้คือ

$$f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 < x < \infty$$

โดยที่ตัวแปรสุ่ม X แทนอายุใช้งานของวัตถุสิ่งของ (life time) [1] หรือเหตุการณ์ที่เกี่ยวเนื่องกับเวลา และ λ แทนอายุการใช้งานโดยถัวเฉลี่ย

[1] X_i = อายุใช้งานของวัตถุหรือหน่วยทดลองหน่วยที่ i

ดังนั้น

$$L_0 = \prod_i^n f_X(x_i ; \lambda_0) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 x_1} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x_2} \ldots \lambda_0 e^{-\lambda_0 x_n}$$

$$= \lambda_0^n e^{\lambda_0} \sum_i^n x_i$$

$$L_1 = \prod_i^n f_X (x_i;\lambda 1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_2} \ldots \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_n}$$

$$= \lambda_1^n e^{-\lambda_1} \sum_i^n x_i$$

โดยอาศัย NPL เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\frac{L_0}{L_1} \leqslant k$

$$=> \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_i^n x_i}}{\lambda_1^n e^{\lambda_1 \sum_i^n x_i}} \leqslant k$$

$$(\frac{\lambda_0}{\lambda_1})^n e^{\lambda_1 \sum_i^n x_i} - \lambda_0 \sum_i^n x_i \leqslant k$$

take log ตลอด

$$=> n l n\lambda_0 - n l n\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_0) \sum_i^n x_i \leqslant \ln k$$

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \sum_i^n x_i \leqslant \ln k - n\ln\lambda_0 + n\ln\lambda_1$$

แต่ตามสมมุติฐานรองนั้น $\lambda_1 < \lambda_0$ ดังนั้น $(\lambda_1 - \lambda_0)$ มีค่าเป็นปริมาณที่ติดลบ เมื่อนำ $(\lambda_1 - \lambda_0)$ หารอสมการโดยตลอดจึงมีผลให้อสมการเปลี่ยนรูปจาก $\leqslant$ เป็น $>$ ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\sum_i^n x_i > \frac{\ln k - n\ln\lambda_0 - n\ln\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} = k'$$

ปัญหาก็คือ k' มีค่าเท่าไร

จากคุณสมบัติข้อที่ 3 ของ NPL คือ $\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 \mid H_0\}$

$$=> \alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 \mid H_0 : \lambda = \lambda_0\}$$

$$= \Pr\{\sum_i^n x_i > k' \mid \lambda = \lambda_0\}$$

พิจารณาตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_i^n X_i$ เนื่องจาก $X \sim EX(\lambda)$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม Y จึงมีการแจกแจงแบบแกมม่าคือ $Y \sim G(\lambda, n)$ และเมื่อสมมุติฐานหลักเป็นจริงจะพบว่า $Y \sim G(\lambda_0, n)$

$$=> \Pr\{\sum_i^n X_i > k'\} = \alpha = \int_{k'}^{\infty} \frac{\lambda_0^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda_0} y_{dy}$$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $y = \sum_i^n x_i > k'$ โดยที่ k' สามารถคำนวณหามาได้จากสมการ

$$\alpha = \int_{k'}^{\infty} \frac{\lambda_0^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{\lambda_0} y_{dy}$$

หรือจะเปิดหาค่า Quantile k' จากตารางแกมม่าก็ได้

อย่างไรก็ตาม การใช้ตารางแกมม่าอาจมีปัญหาอยู่บ้างโดยเฉพาะเมื่อ λ_0 มิใช่เป็นจำนวนเต็มบวก [1] เพื่อความสะดวกเราควรหาหนทางสร้าง Sampling Distribution ของ $\sum_i^n X_i$ ในรูปอื่น

พิจารณาตัวแปรสุ่ม X เมื่อ $X \sim Ex(\lambda)$ ดังนั้น $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$

และพบว่าตัวแปรสุ่ม $W = 2\lambda X$ จะมี mgf เป็น $M_W(t) = M_X(2\lambda t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 2\lambda t}$

$= \dfrac{1}{1-2t} = (\dfrac{1}{1-2t})^{2/2}$ ซึ่งแสดงว่า $W \sim \chi^2_{(2)}$ ดังนี้ตัวแปรสุ่ม $Y = 2\lambda \sum_i^n X_i$

$= \sum_i^n 2\lambda X_i$ จะมี mgf. เป็น $M_Y(t) = (\dfrac{1}{1-2t})^n = (\dfrac{1}{1-2t})^{2n/2}$

---

[1] อ่านการแจกแจงแบบแกมม่าในบทที่ 4 ตอน 4.2.1 และตอน 4.2.2 และการใช้ตารางแกมม่าในตัวอย่างที่ 4.31 - 4.33

หรือตัวแปรสุ่ม $Y \sim \chi^2_{(2n)}$

ดังนั้น จากสมการ $\alpha = \Pr\{\sum_i^n X_i > k' \mid \lambda = \lambda_0\}$

$$=> \quad \alpha = \Pr\{2\lambda_0 \sum_i^n X_i > 2\lambda_0 k'\}$$

ด้วยเหตุที่ตัวแปรสุ่ม $2\lambda \sum_i^n X_i$ เมื่อ $X \sim EX(\lambda)$ มีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(2n)}$ ดังนั้น α จึงเป็นค่าพื้นที่ในเขตวิกฤตใต้โค้ง χ^2 ที่มี $df = 2n$

$$\Pr\{2\lambda_0 \sum_i^n X_i > 2\lambda_0 k'\} = \alpha = \Pr\{\chi^2_{(n)} > \chi_{2n,\,1-\alpha}\}$$

$$=> \quad 2\lambda_0 k' = \chi^2_{2n,1-\alpha}$$

$$k' = \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha}$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐาน ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $y = \sum_i^n x_i > \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha}$

(2) การคำนวณหาความเสี่ยงประเภทที่ 2

จาก $\beta = \Pr\{\text{accept } H_0 \mid H_1\}$

$$\beta(\lambda_1) = \Pr\{\sum_i^n X_i \leqslant \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,\,1-\alpha} \mid \lambda = \lambda_1 < \lambda_0\}$$

เมื่อ $\lambda = \lambda_1$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $Y = 2\lambda_1 \sum_i^n x_i \sim \chi^2_{(2n)}$

$$=> \quad \beta(\lambda_1) = \Pr\{2\lambda_1 \sum_i^n X_i \leqslant \frac{2\lambda_1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,\,1-\alpha}\}$$

$$= \Pr\{\chi^2_{(2n)} \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,\,1-\alpha}\}$$

(3) การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

จาก $\beta(\lambda_1) = \Pr\{\chi^2_{(2n)} \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha}\}$

$$\Rightarrow \quad \Pr\{\chi^2_{(2n)} \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha}\} = \beta(\lambda_1)$$

$$= \Pr\{\chi^2_{(2n)} \leqslant \chi^2_{2n,\beta}\}$$

ดังนั้น $$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha} = \chi^2_{2n,\beta}$$

ขนาดตัวอย่างอุตมะจึงคำนวณได้จากสมการ

$$\frac{\chi^2_{2n,\beta}}{\chi^2_{2n,1-\alpha}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

ข. $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$

โดยอาศัยเทคนิคและวิธีการทำนองเดียวกับ ข้อ ก. เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$y = \sum_i^n x_i \leqslant \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha}$$

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

$$\beta(\lambda_1) = \Pr\{\chi^2_{(2n)} > \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha}\}$$

(3) การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

ขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha} = \chi^2_{2n,1-\beta}$$

หรือ $$\frac{\chi^2_{2n,1-\beta}}{\chi^2_{2n,\alpha}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ ขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 6.3 บริษัทผู้ผลิตทรานซิสเตอร์ กล่าวว่า ตัวทรานซิสเตอร์ของบริษัทมีอายุใช้งานได้นานถึง 50 ชั่วโมง หรือมีอัตราเสื่อมสภาพเพียง .02

เพื่อทดสอบความจริงข้อนี้ฝ่ายตรวจสอบจึงทำการสุ่มตัวอย่างทรานซิสเตอร์มา 5 ตัว แล้วบันทึกอายุการใช้งานโดยนำเข้าต่อในวงจร ปรากฏข้อมูลอายุใช้งานของทรานซิสเตอร์แต่ละตัวดังนี้ 60, 48, 50, 42, 55

ก. จงทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \lambda = .02$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 < .02$

ข. อยากทราบว่าควรสุ่มตัวอย่างทรานซิสเตอร์มาทดสอบกี่ตัว จึงจะมีผลให้ได้ Power สูงถึง 80% เมื่อ $\lambda_1 = .01$

ค. จงคำนวณหา $\beta(\lambda = .015)$

วิธีทำ

ก. $H_0 : \lambda = .02$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 < .02$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$y = \sum_{i}^{n} x_i > \frac{1}{2\lambda_0} \chi^2_{2n,1-\alpha}$$

กำหนดให้ $\alpha = .05$ ดังนั้น $\chi^2_{2n,\,1-\alpha} = \chi^2_{10,\,.95} = 18.31$

$$\frac{1}{2\lambda_0} \chi^2_{2n,1-\alpha} = \frac{1}{2(.02)} \chi^2_{10,.95} = \frac{18.31}{.04} = 457.75$$

$$y = \sum_{i}^{5} x_i = 60 + 48 + 50 + 42 + 55 = 255$$

จะเห็นว่า $y < \frac{1}{2\lambda_0} \chi^2_{2n,1-\alpha}$ หรือค่า y มิได้ตกอยู่ในเขตวิกฤต ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ และเชื่อว่าอายุใช้งานเฉลี่ยของทรานซิสเตอร์มีค่าเท่ากับ 50 ชั่วโมง

ข. $\Pi(\lambda = .01) = .80$ ดังนั้น $\beta(\lambda = .01) = 1 - .80 = .20$

ขนาดตัวอย่างที่ควบคุมให้ $\alpha = .50$ และ $\beta = .20$ สามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้คือ

$$\frac{\chi^2_{2n,\beta}}{\chi^2_{2n,1-\alpha}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$$\frac{\chi^2_{2n,.20}}{\chi^2_{2n,.50}} = \frac{.01}{.02} = .50$$

จากตาราง χ^2 ดูที่สดมภ์ p = .25 (ไม่มีสดมภ์ p = .20) และสดมภ์ที่ p = .50 พบว่าเมื่อ df สูงขึ้น อัตราส่วน $\frac{\chi^2_{2n,.25}}{\chi^2_{2n,.05}}$ จะลดลงตามลำดับและเชื่อว่าเมื่อ df มากกว่า 100 อัตราส่วนดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ .50 ในที่นี้ตารางกำหนดค่า df ไว้เพียง 100 เราจึงไม่อาจให้คำตอบที่ชัดเจนได้ สมมุติว่าเมื่อ df = 160 มีผลให้ $\frac{\chi^2_{2n,.20}}{\chi^2_{2n,.05}} = .50$ แสดงว่า 2n = 160 หรือ n = 80

ค. $\beta(\lambda = .015) = ?$

จาก $\beta(\lambda_1) = \Pr\{\chi^2_{2n} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha}\}$

$$=> \beta(\lambda = .015) = \Pr\{\chi^2_{10} \leq \frac{(.015)(18.31)}{.02}\}$$

$$= \Pr\{\chi^2_{10} \leq 13.73\}$$

$$= .750 + .051 = .801 \text{ (อาศัยวิธี Interpolation)}$$

6.2.3 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ p ของกลุ่มประชากรอนุกรมเรขาคณิต

ก. $H_0 : p = p_p$ vs $H_1 : p = p_1 < p_0$

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

สุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ จากกลุ่มประชากรที่มีการกระจายแบบอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งตัวแปรสุ่มอนุกรมเรขาคณิต pdf ดังนี้คือ

$$f_X(x;p) = pq^{x-1};\ x = 1, 2, \ldots,$$

โดยที่ ตัวแปรสุ่ม X แสดงจำนวนครั้งของการทดลองเบอร์นุลลิที่ใช้ทั้งหมดกระทั่งประสบผลสำเร็จเป็นครั้งแรก (first success) และ p แสดงความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จ [1]

---

[1] อ่านตอน 4.2.3

ดังนั้น

$$L_0 = \prod_i^n f_X(x_i;p_{p0}) = p_0^n q_0^{\Sigma x_i - n}$$

และ $$L_1 = \prod_i^n f_x(i;p_1) = p_1^n q_1^{\Sigma x_i - n}$$

ดังนั้น โดยอาศัย NPL เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\frac{p_0^n q_0^{\overset{n}{\Sigma}(x_i - n)}}{p_1^n q_1^{\overset{n}{\Sigma}(x_i - n)}} \leqslant k$$

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^n \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{\Sigma x_i - n} \leqslant k$$

$$=> n\ln p_0 - \ln p_1 + (\ln q_0 - \ln q_1) \sum_i^n x_i - n(\ln q_0 - \ln q_1) \leqslant \ln k$$

$$(\ln q_0 + \ln q_1) \sum_i^n x_i \leqslant \ln k - n\ln p_0 + n\ln p_1 + n\ln q_0 - n\ln q_1$$

เนื่องจากสมมุติฐานรองถือว่า $p_1 < p_0$ ดังนั้นย่อมมีผลให้ $q_1 > q_0$ และ $\ln q_1 > \ln q_0$ ซึ่งมีผลให้ $(\ln q_0 - \ln q_1)$ มีค่าเป็นปริมาณที่ติดลบ

ดังนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\sum_i^n x_i > \frac{\ln k - \ln p_0 + n\ln p_1 + n\ln q_0 - n\ln q_1}{\ln q_0 - \ln q_1} = k'$$

จากสมการ $\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 \mid H_0\}$

ดังนั้น $\alpha = \Pr\{\sum_i^n X_i > k' \mid p = p_0\}$

พิจารณาตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_i^n X_i$ เนื่องจากตัวแปรสุ่ม X_i มีการแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิต ดังนั้น $M_{X_i}(t) = pe^t/(1-qe^t)$ $M_y(t) = \prod_i^n M_{X_i}(t) = (pe^t/(1-qe^t))^n$ แสดงว่าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบนิเสธทวินาม

โดยที่

$$f_Y(y;p) = \binom{y-1}{n-1} p^n q^{y-n} ; \quad y = n, n+1, \ldots$$

ซึ่งถ้าสมมุติฐานหลักถูกต้องหรือ $p = p_0$ แล้วจะพบว่า $f_Y(y;p_0) = \binom{y-1}{n-1} p_0^n q_0^{y-n}$ [1]

$$\Pr\{\sum_{i}^{n} X_i > k'\} = \alpha = \sum_{y=k+1}^{\infty} \binom{y-1}{n-1} p_0^n q_0^{y-n}$$

$$= 1 - \sum_{y=n}^{k'} \binom{y-1}{n-1} p_0^n q_0^{y-n}$$

เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $y = \sum_{i}^{n} x_i > k'$ โดยที่ ค่า k' สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\alpha = 1 - \sum_{y=n}^{k'} \binom{y-1}{n-1} p_0^n q_0^{y-n}$$

หรืออาศัยตารางสะสมของตารางนิเสธทวินามก็ได้

อย่างไรก็ตาม เพื่อความสะดวกเราสามารถใช้ CLT [2] ประมาณค่าตัวทดสอบได้ดังนี้

จาก $\quad \alpha = \Pr\{\sum X_i > k' \mid p = p_0\}$

---

[1] อ่านข้อสังเกตท้ายนิยาม 4.5 หน้า 116 อย่างไรก็ตาม ขอเพิ่มเติมคำอธิบายไว้อีกเล็กน้อย เพื่อป้องกันความสับสน กล่าวคือ ในกรณีของการแจกแจงแบบอนุกรมเรขาคณิตนั้น ตัวแปรสุ่ม x จะแสดงจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกระทั่งประสบผลสำเร็จเป็นครั้งแรก (รวมครั้งที่สำเร็จด้วย เช่น สอบ 5 ครั้ง จึงผ่าน หมายถึงสอบทั้งสิ้น 5 ครั้ง ครั้งที่ 5 เป็นครั้งที่สอบผ่าน) เมื่อสุ่มตัวอย่าง $X_1, X_2, X_3 \ldots, X_n$ มาเป็นตัวอย่าง ดังนี้ X_i จึงแสดงจำนวนครั้งของการทดลอง จนกระทั่งประสบผลสำเร็จเป็นครั้งแรกในรอบที่ i; $i = 1, 2, \ldots, n$ เช่น ทำการทอดลูกเต๋า 5 รอบ รอบที่ 1 ทอด 4 ครั้ง จึงหงายเอี่ยว รอบที่ 2 ทอด 10 ครั้ง จึงหงายเอี่ยว รอบที่ 3 ทอด 7 ครั้ง จึงหงายเอี่ยว รอบที่ 4 ทอด 6 ครั้ง จึงหงายเอี่ยว รอบที่ 5 ทอด 12 ครั้ง จึงหงายเอี่ยว ดังนั้น จึงพบว่า $x_1 = 4, x_2 = 10, x_3 7, x_4 = 6, x_5 = 12$ และ $n = 5$ ดังนั้น $y = \sum_{i}^{5} x_i = 4 + 10 + 7 + 6 + 12 = 39$

และด้วยเหตุที่ $Y = \sum_{i}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบนิเสธทวินามมีพารามิเตอร์ p ดังนั้น Y แสดงจำนวนผลรวมของการทดลองทั้งสิ้นจนครบ n ครั้ง ตามตัวอย่างผลรวมการทดลอง รวม 39 ครั้ง จึงพบลูกเต๋าหงายเอี่ยว 5 ครั้ง การทดลองครั้งที่ 39 เป็นครั้งที่หงายเอี่ยวครั้งที่ 5

[2] CLT ใช้ได้ดีเฉพาะเมื่อ $p \simeq .5$

เนื่องจาก $Y = \sum_{i}^{n} X_i$ มีการแจกแจงแบบนิเสธทวินาม ดังนั้น $E(Y) = n/p$ และ $V(Y) = \frac{nq}{p^2}$ เมื่อ n = จำนวนครั้งของ success ที่ปรากฏจากผลการทดลองหรือตั้งความมุ่งมั่นเอาไว้

และเมื่อ $p = p_0$ ดังนั้น $E(Y = \frac{n}{p_0}$ และ $V(Y) = nq_0/p_0^2$

$$=> \alpha \simeq \Pr\{\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} > \frac{k'-n/p_0}{\sqrt{nq_0/p_0^2}}\} = \Pr\{Z > \frac{k'-n/p_0}{\sqrt{nq_0/p_0^2}}\}$$

ดังนั้น $$\Pr\{Z > \frac{k'-n/p_0}{\sqrt{nq_0/p_0^2}}\} \simeq \alpha = \Pr\{Z > Z_{1-\alpha}\}$$

$$\frac{k'-n/p_0}{\sqrt{nq_0/p_0^2}} \simeq Z_{1-\alpha}$$

$$k' \simeq \frac{}{p_0} + Z_{1-\alpha}\sqrt{nq_0/p_0^2}$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $y = \sum_{i}^{n} x_i > \frac{n}{p_0} + Z_{1-\alpha}\sqrt{nq_0/p_0^2}$

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

ให้ k^* คือค่าของ k' ที่คำนวณได้จากสมการ $= 1 - \sum_{y=n}^{k'} \binom{y-1}{n-1} p_0^n q_0^{y-n}$

ดังนั้น $$\beta(p_1) = \Pr\{\sum_{i}^{n} X_i \leqslant k^* \mid p = p_1 < p_0\}$$
$$\doteq \sum_{y=n}^{k^*} \binom{y-1}{n-1} p_1^n q_1^{y-n}$$

หรือประมาณค่า $\beta(p_1)$ ได้โดยอาศัย CLT ดังนี้

$$\beta(p_1) \simeq \Pr\{\sum_{i}^{n} X_i \leqslant k' \mid p = p_1 \leqslant p_0\}$$

$$\simeq \Pr\{\sum_{i}^{n} X_i \leqslant \frac{n}{p_0} + Z_{1-\alpha}\sqrt{nq_0/p_0^2} \mid p = p_1\}$$

$$\simeq \Pr\{Z \leqslant (\frac{n}{p_0} + Z_{1-\alpha}\sqrt{nq_0/p_0^2} - \frac{n}{p_1}) / \sqrt{nq_1/p_1^2}\}$$

$$\simeq \Pr\{Z \leqslant \frac{(n/p_0 - n/p_1)}{\sqrt{n_1/p_1^2}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_1^2 q_0}{p_0^2 q_1}}$$

(3) การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

$$\text{จาก } B(p_1) \simeq \Pr\{Z \leqslant \frac{(n/p_0 - np_1)}{\sqrt{nq_1/p_1^2}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{p_1^2 q_0/p_0^2 q_1}\}$$

$$=> \frac{\sqrt{n}\,(1/p_0 - 1/p_1)}{\sqrt{q_1/p_1^2}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{p_1^2 q_0/p_0^2 q_1} \simeq Z_\beta$$

$$\sqrt{n} \simeq \frac{\{Z_\beta - Z_{1-\alpha}\sqrt{p_1^2 q_0/p_0^2 q_1})\sqrt{q_1/p_1^2}\}\,|}{(1/p_0 - 1/p_1)}$$

ดังนั้น ขนาดตัวอย่างอุตมะคือ

$$n \simeq \frac{(Z_\beta - z_{1-\alpha}\sqrt{p_1^2 q_0/p_0^2 q_1})^2 (q_1/p_1^2)}{(1/p_0 - 1/p_1)^2}$$

ตัวอย่าง 6.14 นักวิทยาศาสตร์ทำการทดลองวิธีนำยานอวกาศลงสู่พื้นผิวของดวงจันทร์ โดยทำการทดลองในห้องทดลองที่จำลองบรรยากาศและสภาพแวดล้อมคล้ายผิวดวงจันทร์ การทดลองครั้งนี้เพื่อมุ่งทดสอบสุ่มสมมุติฐานดูว่า โอกาสที่ยานอวกาศตามแบบที่ออกไว้ใหม่จะลงสัมผัสผิวดวงจันทร์อย่างนุ่มนวลมีอยู่ถึง 30% หรือไม่ ถ้าหากพบว่ามีโอกาสต่ำกว่า 30% ฝ่ายวิศวกรจะได้ออกแบบยานเสียใหม่

จากการทดลอง พบว่ายานจำลองลงสัมผัสผิวดวงจันทร์อย่างนุ่มนวลเป็นครั้งที่ 3 ในการทดลองครั้งที่ 20 ถ้าท่านเป็นนักวิทยาศาสตร์ผู้นั้นท่านจะตัดสินใจอย่างไร

กำหนดให้ใช้ $\alpha = .05$

วิธีทำ $H_0 : p = .30$ vs $H_1 : p > .30$

จากการทดลองพบว่า เมื่อทำการทดลองครบ 20 ครั้ง จะปรากฏผลการทดลองว่ายานอวกาศลงสู่ผิวดวงจันทร์อย่างนุ่มนวลครบ 3 ครั้ง

ดังนั้น $y = \sum_{i}^{3} x_i = 20, n = 3$

และปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $y = \sum_{i}^{3} x_i > \frac{n}{p_0} + Z_{1-\alpha}\sqrt{nq_0/p_0^2}$

$$\frac{n}{p_0} + Z_{1-\alpha}\sqrt{nq_0/p_0^2} = \frac{3}{.3} + 1.96\sqrt{3(.7)/.3^2}$$

$$= 10 + 1.96\sqrt{23.33}$$

$$= 19.468$$

จะเห็นว่า $y > 19.468$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : p = .30$ และเชื่อว่า $p < .30$ ซึ่งเมื่อปรากฏผลดังนี้ยานอวกาศควรจะได้รับการปรับปรุงและออกแบบเสียใหม่

ข้อสังเกต $n = 3$ แสดงว่าได้ดำเนินการทดลองเบอร์นุลลิจนกระทั่งได้ first success 3 ครั้ง ใน 3 รอบ ๆ หนึ่งทดลองกี่ครั้งไม่อาจทราบได้ ทราบแต่เพียงว่าในการทดลองทั้ง 3 รอบ ปรากฏเป็นผลรวมการทดลองทั้งสิ้น 20 ครั้ง อาจเป็นในลักษณะดังนี้คือ รอบแรกทำการทดลอง 7 ครั้ง จึงได้ first success รอบที่ 2 ทดลอง 8 ครั้ง ได้ first success รอบที่ 3 ทดลอง 5 ครั้ง ได้ first success รวมการทดลอง 20 ครั้ง ได้ success 3 ครั้ง ใน 3 รอบ นั่นย่อมแสดงว่าการทดลองรอบหนึ่ง ๆ จะต้องทดลองติดต่อกันจนได้ first success จึงทดลองรอบต่อไป อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติเราไม่จำเป็นต้องหยุดทดลองเป็นระยะ ๆ เมื่อเสร็จสิ้นไปในแต่ละรอบ แต่เราจะทดลองติดต่อกันไป

ข. $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p = p_1 > p_0$

โดยอาศัยเทคนิคและวิธีการทำนองเดียวกันกับ ข้อ ก. เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\sum_{i}^{n} \leqslant k'$$

โดยที่ k' คำนวณได้จากสมการ

$$\alpha = \sum_{y=n}^{k'} \binom{y-1}{n-1} p_0^y q_0^{y-n}$$

หรือโดยอาศัย CLT จะพิสูจน์ได้ว่า

ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$y = \sum_{i}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{p_0} + Z_\alpha \sqrt{nq_0}/p_0^2$$